МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)
Костанайский филиал

Сизова О.А.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

г. Костанай, 2019 г.

УДК 511(075)
ББК 22.1 я73
С 34

Рецензенты:
Демисенов Берик Нуртазинович, кандидат физико-математических наук
Карасева Эльмира Миндыхатовна, кандидат педагогических наук

Автор:
Сизова Ольга Алексеевна

С 34 Линейная алгебра. Сборник задач и упражнений: Учебное пособие / О.А.Сизова. – Костанай: Костанайский филиал ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет», 2019. - 65 с.

ISBN 978-601-7615-00-0

В пособии приведено более 150 задач по пяти разделам линейной алгебры и более 70 примеров, которые сопровождаются подробным решением. В каждом разделе приведены упражнения в количестве, достаточном для аудиторной и домашней работы. Учебное пособие рекомендовано ученым советом Костанайского филиала ФГБОУ ВО «ЧелГУ» для использования в качестве учебного пособия для студентов направления подготовки 38.03.01 Экономика.

УДК 511(075)
ББК 22.1 я73
ISBN 978-601-7615-00-0

Содержание

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы. Действия над матрицами

Пример 1.1.1. *Даны матрицы* $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Найти: а) $2{\cdot}A+B$, *б)* $A\text{-}3{\cdot}B$, *в)* $A+C$, *г)* $A{\cdot}B$, *д)*A^2, *е)*C^T.

Решение:

а) Размерность матрицы A - 2×2. Размерность матрицы B - 2×2. Матрицы одинаковых размерностей. Следовательно, эти матрицы можно складывать.

$$2{\cdot}A+B=2\cdot\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 14\\ 8 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 11 & 4\end{pmatrix}$$

б) Размерность матрицы A -2×2. Размерность матрицы B - 2×2. Матрицы одинаковых размерностей. Следовательно, эти матрицы можно складывать.

$$A\text{-}3{\cdot}B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7\\ -5 & -5\end{pmatrix}$$

в) Размерности матриць A -2×2. Размерность матрицы C - 3×3. Матрицы разных размерностей. Следовательно, эти матрицы складывать нельзя.

$A+C$ = не существует

г) Проверим, можно ли умножить матрицу A на матрицу B. Для этого, определим размерность каждой матрицы.

размерность A - $\boxed{2\times2}$ = $\boxed{2\times2}$ - размерность B

2×2 - размерность новой матрицы

Следовательно, матрицы являются согласованными и их можно умножать.

$$A{\cdot}B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1+7\cdot3 & 5\cdot0+7\cdot2\\ 4\cdot1+1\cdot3 & 4\cdot0+1\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & 14\\ 7 & 2\end{pmatrix}$$

д) Размерность матрицы A -2×2. Квадратную матрицу можно умножать саму на себя.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 7\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25+28 & 35+7\\ 20+4 & 28+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}53 & 42\\ 24 & 29\end{pmatrix}$$

е) Найдем матрицу C^T, транспонированную к матрице C.

$$C=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow C^T=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&1\\3&1&3\end{pmatrix}$$

Ответ: а) $2\cdot A+B=\begin{pmatrix}11&14\\11&4\end{pmatrix}$; б) $A\text{-}3\cdot B=\begin{pmatrix}2&7\\-5&-5\end{pmatrix}$; в) не существует;

г) $A\cdot B=\begin{pmatrix}26&14\\7&2\end{pmatrix}$; д) $A^2=\begin{pmatrix}53&42\\24&29\end{pmatrix}$; е) $C^T=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&1\\3&1&3\end{pmatrix}$.

Упражнения:

1. Найдите матрицу $-2\cdot A+3\cdot B^T$, если $A=\begin{pmatrix}-1&-3\\1&0\\5&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-2&-3&5\end{pmatrix}$

2. Найдите матрицу $A^T-3\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\\0&5\end{pmatrix}$

3. Найдите матрицу $A-2\cdot B+4\cdot C$, если $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\-2&4&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&1&1\\-1&0&2\\1&2&3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}-2&0&1\\3&-1&0\\1&2&4\end{pmatrix}$

4. Найдите те из произведений матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$, которые существуют

а) $A=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-3&-1&1\\0&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\5&0\\1&-6\end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

г) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

5. Вычислите матрицу $(A \cdot B)^T - C^2$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Вычислите матрицу $A \cdot B \cdot C - 3 \cdot E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

а E – единичная матрица.

7. Вычислите матрицу $3 \cdot A^2 - 2 \cdot A + 3 \cdot E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, а E – единичная матрица.

8. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Какую матрицу нужно прибавить к матрице A, чтобы получить единичную матрицу?

1.2. Определители второго и третьего порядков

Пример 1.2.1. *Вычислить определители:* а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 6$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 8 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 \cdot 3 =$

$= 24 - 5 + 4 - 40 - 1 + 12 = -6$

Ответ: а) 6; б) -6.

Пример 1.2.2. *Решить уравнение* $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 4 = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение: Найдем определители, входящие в уравнение. Получаем

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - x; \quad \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 3; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+0+8+4-0-3=10.$$

В результате этого, уравнение принимает вид $6 - x - 10x + 4 = 2x - 3$ или $-13x = -13$. Отсюда $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Упражнения:

9. Вычислите определители второго порядка: а) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

10. Вычислите определители третьего порядка: а) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

11. Решите уравнение $\begin{vmatrix} -3 & x & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4 = \begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

12. Решите уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$

13. Решите неравенство $3x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$

1.3. Миноры. Алгебраические дополнения. Обратная матрица

Пример 1.3.1. *Дана матрица* $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$. *Найти все её алгебраические дополнения.*

Решение: Вычислим алгебраические дополнения по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-5\ ,\ A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=8\ ,\ A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=9$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=10\ ,\ A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-10\ \ A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-10$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5\ ,\ A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4,\ \ A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7$$

Пример 1.3.2. *Найти обратную матрицу к матрице* A, *если*
$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Решение:
а) Найдем определитель матрицы A.

Получаем

$$\Delta_A=\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)\cdot 1+2\cdot 0\cdot(-1)+2\cdot 1\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot(-1)-$$
$$-2\cdot 1\cdot 1-0\cdot 2\cdot 2=-1$$

б) Определим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4,\ A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=5,\ A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3,\ A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3,\ A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4.$$

в) Составим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ -1 & 5 & 3\\ 1 & -6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

г) Проверим результат. Ограничимся вычислением $A\cdot A^{-1}=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2+2-3 & -8-10+18 & -6-6+12\\ 1-1+0 & -4+5+0 & -3+3+0\\ -1+2-1 & 4-10+6 & 3-6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1}=-\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$.

Пример 1.3.3. *Для данного определителя четвертого порядка найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12},a_{32}. Вычислить определитель: 1) разложив его по элементам 1-ой строки; 2) разложив его по элементам 2-го столбца.*

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 4\\ 4 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 4\end{vmatrix}$$

Решение:

Вычислим миноры для элементов a_{12},a_{32}.

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-1)\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3+4\cdot(-1)\cdot 4-4\cdot(-1)\cdot 3-4\cdot 1\cdot 4-2\cdot(-1)\cdot 2=-18$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=(-3)\cdot 1\cdot 4+1\cdot 4\cdot 3+2\cdot(-1)\cdot 0-3\cdot 1\cdot 0-2\cdot 1\cdot 4-(-1)\cdot 4\cdot(-3)=-20$$

Вычислим алгебраические дополнения для элементов a_{12},a_{32}.

$$A_{12}=(-1)^3\cdot M_{12}=-1\cdot(-18)=18$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot M_{32}=-1\cdot(-20)=20$$

Вычислим определитель, разложив его по элементам 1-ой строки:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} =$$

$$-3 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot 10 - 2 \cdot (-18) + 32 + 0 = 32 + 36 - 30 = 38$$

Вычислим определитель, разложив его по элементам 2-го столбца:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{12} + (-2) \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{42} =$$

$$2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2 \cdot (-18) - 2 \cdot (-4) + 0 + (-6) = 36 + 8 - 6 = 38$$

Ответ: $M_{12} = -18$; $M_{32} = -20$; $A_{12} = 18$; $A_{32} = 20$; $\Delta_4 = 38$.

Пример 1.3.4. *Решить матричное уравнение* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Уравнение имеет вид $A \cdot X = B$. Для того, чтобы найти X необходимо и левую и правую части уравнения умножить слева на A^{-1}: $A^{-1} A \cdot X = A^{-1} B$, $E \cdot X = A^{-1} B$, $X = A^{-1} B$.Здесь E - единичная матрица. Она обладает свойством $E \cdot X = X \cdot E = X$.

В данном примере $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Построим A^{-1}:

а) Найдем определитель матрицы A.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

б) Определим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 3 = 3, \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot 2 = -2, \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot 2 = -2, \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot 1 = 1.$$

в) Составим обратную матрицу: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

г) Теперь найдём X:

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cdot 1+2\cdot 1 & -3\cdot 1+2\cdot 1 \\ 2\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 1 \\ 2\cdot(-1)+3\cdot 1 & 2\cdot(-1)+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнения:

14. Запишите и вычислите миноры второго порядка, содержащиеся в первой и третьей строках определителя $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

15. Найдите миноры третьего порядка, содержащиеся в первой, третьей и четвёртой строках определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

16. Найдите алгебраические дополнения для элементов a_{23} и a_{14} определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

17. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найдите все ее алгебраические дополнения.

18. Дана матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите все ее алгебраические дополнения.

19. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите обратную матрицу.

20. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите обратную матрицу.

21. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ -7 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам третьей строки и второго столбца.

22. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & -2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам первой строки и третьего столбца.

23. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

24. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

25. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

26. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - 2X = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, выполните проверку.

27. Найдите X из матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 3 & 5 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4. Ранг матрицы

Пример 1.4.1. *Вычислить ранг матрицы* $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 9\\ 5 & 3 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0 & -5\end{pmatrix}$ *двумя способами.*

Решение:
а) Вычислим ранг матрицы с помощью окаймления миноров.
Вычислим минор 2-го порядка $\begin{vmatrix}1 & 5\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-22\neq 0.$ Так как существует ненулевой минор второго порядка, то r (*A*) = 2. Теперь вычислим все миноры 3-го порядка. Их всего четыре:

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 5 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}5 & 0 & 9\\ 3 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -5\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}1 & 0 & 9\\ 5 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -5\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}1 & 5 & 9\\ 5 & 3 & 1\\ 3 & -1 & -5\end{vmatrix}=0.$$

Т.к. все миноры 3-го порядка равны нулю, то r (*A*) = 2.
б) Вычислим ранг матрицы с помощью элементарных преобразований.

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 9\\ 5 & 3 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-5)\times(-3)\\ \hookleftarrow\quad\\ \quad\hookleftarrow\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 9\\ 0 & -22 & 0 & -44\\ 0 & -16 & 0 & -32\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times1/22\\ \times1/16\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 9\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \hookleftarrow\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 9\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ответ: *r (A)* = 2

Пример 1.4.2. *Вычислить ранг матрицы* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 6 & 2\\ 2 & 4 & 5 & 1\\ 1 & -1 & 5 & 0\end{pmatrix}$ *с помощью элементарных преобразований.*

Решение:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\-1&0&4&1\\0&2&6&2\\2&4&5&1\\1&-1&5&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&0\\-1&0&4&1\\1&-1&5&0\\2&4&5&1\\0&2&6&2\end{pmatrix}\begin{array}{lll} & \times(-1) & \times(-2)\\ \hookleftarrow + & & \\ & \hookleftarrow + & \\ & & \hookleftarrow + \\ & & \end{array} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&7&1\\0&-3&2&0\\0&0&-1&1\\0&2&6&2\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \cdot(-1)\\ \\ \\ \hookleftarrow +\end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&7&1\\0&-3&2&0\\0&0&-1&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{array}{ll} & \\ & \\ \hookleftarrow + & \\ & \times(-1)\\ & \hookleftarrow +\end{array} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&2&7&1\\0&-1&9&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-1&9&1\\0&2&7&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \times 2\\ \hookleftarrow + \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-1&9&1\\0&0&25&3\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-1&9&0\\0&0&-1&1\\0&0&25&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \times 25\\ \hookleftarrow + \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&-1&9&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&28\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ответ: $r(A) = 4$

Упражнения:

28. Вычислите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&-1&2\\2&4&-5\end{pmatrix}$ двумя способами.

29. Вычислите ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&3&1&2\\3&1&2&-2\\0&4&2&5\end{pmatrix}$$

30. Вычислите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix}1&3&2&0&5\\2&6&9&7&12\\-2&-5&2&4&5\\1&4&8&4&20\end{pmatrix}$

1.5. Решение экономических задач с помощью матриц

Пример 1.5.1. *В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах «Деп» и «Новый день» в магазины «Солнышко», «Спутник» и «Меркурий», причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин «Солнышко» стоит 40 ден. ед., в магазин «Спутник» - 80, а в «Меркурий» - 120 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.*

Молокозавод	Магазин		
	Солнышко	Спутник	Меркурий
Деп	25	45	15
Новый день	20	37	18

Решение:
Обозначим через A матрицу, данную нам в условии, а через B - матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е.,

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 45 & 15 \\ 20 & 37 & 18 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 25 & 45 & 15 \\ 20 & 37 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \cdot 40 + 45 \cdot 80 + 15 \cdot 120 \\ 20 \cdot 40 + 37 \cdot 80 + 18 \cdot 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6400 \\ 5920 \end{pmatrix}.$$

Ответ: Молокозавод «Деп» ежедневно тратит на перевозки 6400 ден. ед., а молокозавод «Новый день» - 5920 ден.ед.

Пример 1.5.2. *Швейное ателье «Твой стиль» производит платья, блузки и юбки. Плановый выпуск за декаду характеризуется матрицей* $X = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \end{pmatrix}$. *Используются ткани четырех типов: шелк, шифон, трикотаж, жаккард. В таблице приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Матрица* $C = \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix}$ *задает стоимость (руб.) метра ткани каждого типа, а матрица* $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *- стоимость (руб.) перевозки метра ткани каждого вида.*

Вид изделия	Расход ткани			
	шелк	шифон	трикотаж	жаккард
Платья	5	1	0	3
Блузки	3	2	0	2
Юбки	0	0	4	3

а) Сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана?

б) Найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида.

в) Определить стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана.

г) Подсчитать стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана с учетом ее транспортировки.

Решение:

Обозначим через A матрицу, данную нам в условии, т. е., $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Для нахождения количества метров ткани, необходимой для выполнения плана, нужно матрицу X умножить на матрицу A:

$$X \cdot A = (10 \quad 15 \quad 23) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (10 \cdot 5 + 15 \cdot 3,\ 10 \cdot 1 + 15 \cdot 2,\ 23 \cdot 4,\ 10 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 23 \cdot 3) =$$

= (95 40 92 129).

б) Стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида, найдем, перемножив матрицу A и матрицу C:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 40 + 1 \cdot 35 + 0 \cdot 24 + 3 \cdot 16 \\ 3 \cdot 40 + 2 \cdot 35 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 16 \\ 0 \cdot 40 + 0 \cdot 35 + 4 \cdot 24 + 3 \cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix}.$$

в) Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана, находим следующим образом:

$$X \cdot A \cdot C = (10, 15, 23) \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix} = 10 \cdot 283 + 15 \cdot 222 + 23 \cdot 144 = 9472.$$

г) Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана, с учетом транспортных расходов найдем следующим образом:

$$X \cdot A \cdot P = (95 \quad 40 \quad 92 \quad 129) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 95 \cdot 5 + 40 \cdot 3 + 92 \cdot 2 + 129 \cdot 2 = 1037.$$

Итак, $X \cdot A \cdot C + X \cdot A \cdot P$ = 9472 + 1037 = 10509 (ден. ед).

Ответ:
а) Для выполнения плана потребуется 95 метров шелка, 40 метров шифона, 92 метра трикотажа и 129 метров жаккарда.
б) Стоимость всей ткани, расходуемой на пошив одного платья – 283 руб, одной блузки – 222 руб, одной юбки – 144 руб.
в) Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана равна 9472 руб.
г) Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана с учетом ее транспортировки равна 10509 руб.

Задачи:

31. Молокозавод «Село лесное» производит четыре вида йогурта: абрикосовый, клубничный, ананасный и ванильный. Объем выпуска йогурта задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 40 & 35 & 30 & 25 \end{pmatrix}$. Реализация продукции производится в трех магазинах. Цена реализации единицы каждого вида йогурта в магазины указана в таблице:

	1 магазин	2 магазин	3 магазин
Абрикосовый	2	1	2
Клубничный	3	1	3
Ананасный	2	4	3
Ванильный	1	3	4

Найдите выручку от продажи йогурта в каждом из магазинов и определите, какой из них наиболее выгоден для реализации товара.

32. Швейный салон «Модель» за месяц на пошив двух видов штор, объем выпуска которых составляет 380 и 510 м, использует три вида материалов: сатин, лен, креп. Нормы расхода материалов на единицу каждого вида изделия и цена материала представлены в таблице:

Вид материала	Расход на 1 изделие, м		Цена материала, ден.ед.
	1 вид штор	2 вид штор	
Сатин	3	2	28
Лен	2	1	42
Креп	1	3	35

Найдите матрицу полных затрат по материалам каждого вида и полную стоимость всего материала за месяц.
33. Два комбината выпускают четыре вида консервированной продукции. В матрицах поквартальных выпусков за один отчетный год A_k (где k – номер

квартала в году) элементы a_{ij} представляют объемы выпуска на i-м комбинате j-го вида продукции:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 45 & 78 & 50 & 53 \\ 64 & 60 & 25 & 60 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 50 & 75 & 55 & 53 \\ 50 & 60 & 35 & 66 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 59 & 55 \\ 45 & 60 & 45 & 70 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 53 & 62 & 65 & 56 \\ 40 & 60 & 50 & 72 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу годового выпуска продукции и матрицы прироста объемов производства за каждый квартал, проанализировать полученные результаты.

34. Мебельный цех производит кухонные столы трех видов и продает их в четырех регионах. В таблице указаны цены реализации одного кухонного стола каждого вида в регионах:

	1 регион	2 регион	3 регион	4 регион
1 вид стола	2	5	1	2
2 вид стола	1	8	3	4
3 вид стола	2	4	1	3

Найдите выручку мебельного цеха в каждом регионе, если реализация кухонных столов за месяц (по видам) задана матрицей $P = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 200 \end{pmatrix}$.

35. Предприятие производит колбасные изделия трех видов: салями, сервелат и докторскую колбасу. Для изготовления он использует мясо двух типов: свинина и говядина. Нормы затрат мяса на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Стоимость 1 кг мяса каждого типа задана матрицей $B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix}$. Каковы общие затраты предприятия на производство 100; 200 и 150 ед. салями, сервелата и докторской колбасы соответственно?

ТЕМА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Метод Гаусса

Пример 2.1.1. *Решить систему методом Гаусса:* $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$.

Решение:

а) Представим систему в виде расширенной матрицы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$.

б) «Обнулим» коэффициенты при x_1 во втором и третьем уравнениях. Для этого первую строку, умноженную на (-2), прибавим ко второй, а к третьей строке прибавим первую:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times(-2) \\ \lrcorner + \\ \quad\quad \lrcorner + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right).$$

в) «Обнулим» теперь коэффициент при x_2 в третьей строке. Для этого, новую вторую строку, умноженную на 3, прибавим к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times 3 \\ \lrcorner + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right).$$

В результате, мы привели матрицу к ступенчатому виду. Найдем ранг основной матрицы до вертикальной черты. Ранг этой матрицы равен 3. Найдем ранг расширенной матрицы, ранг равен 3. Так как, ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, то система совместна и имеет решение. Выясним, сколько решений она имеет. Для этого определим число неизвестных, их 3. Ранг равен числу неизвестных, следовательно, система определена и имеет единственное решение. Определим его.

г) Представим полученную систему уравнений в обычном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -x_2 - 2x_3 = -4 \\ \quad\quad -4x_3 = -4 \end{cases}.$$

д) Из последнего уравнения найдем переменную x_3, подставив ее во второе,- найдем переменную x_2, наконец, из первого уравнения найдем переменную x_1. Таким образом, имеем

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 = 1 \\ \quad -x_2 - 2\cdot 1 = -4 \\ \quad\quad x_3 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 + 2 + 1 = 1 \\ \quad x_2 \quad = 2 \\ \quad\quad x_3 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

е) Выполним проверку: $\begin{cases} 2\cdot(-1)+2+1=1 \\ 4\cdot(-1)+2 \quad =-2 \\ -2\cdot(-1)+2\cdot 2+1=7 \end{cases}$ Решение найдено верно.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Пример 2.1.2. *Решить систему методом Гаусса:* $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 2x+y \quad =2 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$.

Решение:

а) Представим систему в виде расширенной матрицы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

б) Для удобства, поменяем местами первую и третью строки. Затем ко второй строке, прибавим первую умноженную на (-2) и к третьей строке, прибавим первую, умноженную на (-3). Получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{cc} \times(-2) & \times(-3) \\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

в) Обратим внимание, что при дальнейшем преобразовании (умножение второй строки на (-1) и прибавление третьей), последняя строка обнуляется:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \times(-1) \\ \hookleftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В результате мы привели матрицу к ступенчатому виду. Найдем ранг основной матрицы до вертикальной черты. Ранг этой матрицы равен 2. Найдем ранг расширенной матрицы, ранг равен 2. Так как ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, то система совместна и имеет решение. Выясним, сколько решений она имеет. Для этого определим число неизвестных, их 3. Ранг меньше числа неизвестных, следовательно, система неопределена и имеет бесконечное множество решений. Найдем эти решения.

г) Представим полученную систему уравнений в обычном виде:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ \quad -y - 2z = 4 \end{cases}$$

д) Решим полученную систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ \quad -y - 2z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 4 - 2z + z = -1 \\ \quad y = -4 - 2z \end{cases} \sim \begin{cases} x = 3 + z \\ y = -4 - 2z \end{cases}$$

Получили выражения неизвестных x и y через, так называемые, свободную неизвестную z: $x = 3 + z$, $y = -4 - 2z$, где z - произвольное число. Эти соотношения описывают множество решений системы и оно называется общим решением системы.

Для того, чтобы сделать проверку нужно найти хотя бы одно из частных решений системы. Пусть $z = 0$, тогда $y = -4$, а $x = 3$. Подставим в каждое уравнение системы, получим

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + 0 = 1 \\ 2 \cdot 3 + (-4) \qquad = 2 \\ 3 + (-4) + 0 = -1 \end{cases}$$

Решение найдено верно.

Ответ: $\begin{cases} x = 3 + z \\ y = -4 - 2z \\ z - \textit{любое число} \end{cases}$

Пример 2.1.3. *Решить систему методом Гаусса:* $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \qquad = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$.

Решение:

а) Представим систему в виде расширенной матрицы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

б) Обнулим коэффициенты при x_1 во втором и третьем уравнениях. Для этого первую строку, умноженную на (-2), прибавим ко второй, а к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \times(-2) & \times(-3) \\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

в) Обнулим коэффициент при x_2 в третьей строке. Для этого новую вторую строку, умноженную на (-1), прибавим к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \lrcorner+ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

В результате мы привели матрицу к ступенчатому виду. Найдем ранг основной матрицы до вертикальной черты. Ранг этой матрицы равен 2. Найдем ранг расширенной матрицы, ранг равен 3. Так как, ранг основной матрицы не равен рангу расширенной матрицы, то система не совместна и не имеет решения.

г) Перейдём теперь от матрицы к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -x_2 - 2x_3 = -2 \\ \qquad\quad 0 = 3 \end{cases}$$

Обратим внимание, что третье уравнение системы представляет собой неверное равенство, следовательно, система не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Упражнения:

36. Решите следующие системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

37. Определите, является ли система совместной, и найдите ее решение:

а) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - y - 5z = -15 \\ x - 2y + z = 9 \\ 5x + y - z = 21 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x + 4y + 4z + 3t = 13 \\ 2x + y + 3z - t = 5 \\ 4x + 3y + z + 2t = 10 \\ -2x + y + 3z + t = 3 \end{cases}$

38. При каких значениях α система $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 2x_4 = \alpha \end{cases}$ будет совместной?

2.2. Метод Крамера

Пример 2.2.1. *Решить систему линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера* $\begin{cases} -3x_1+4x_2+x_3=17 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ -2x_1+3x_2+5x_3=8 \end{cases}$

Решение:

а) Выпишем коэффициенты при неизвестных в матрицу $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

б) Вычислим определитель этой матрицы

$$\Delta=\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-15+8+6+2-9-40=-48\neq 0 \Rightarrow$$

Так как определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение.

в) Для того, чтобы найти решение системы, найдем сначала значение определителей:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 17 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix}=85-32+0-8+51-0=96;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} -3 & 17 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 8 & 5 \end{vmatrix}=0+34+16-0-24-170=-144;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} -3 & 4 & 17 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 8 \end{vmatrix}=-24+0+102+34-0-64=48.$$

г) Определим решение системы:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{96}{-48}=-2;\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{-144}{-48}=3;\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{48}{-48}=-1.$$

д) Выполним проверку:

$$\begin{cases} -3\cdot(-2)+4\cdot 3+(-1)=17 \\ 2\cdot(-2)+3-(-1)=0 \\ -2\cdot(-2)+3\cdot 3+5\cdot(-1)=8 \end{cases}$$

Решение найдено верно.

Ответ: $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=3 \\ x_3=-1 \end{cases}$

Пример 2.2.2. *При каких a и b система* $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = b \\ 4x_1 - ax_2 - 3x_3 = 17 \end{cases}$ *имеет*

а) единственное решение;
б) не имеет решения;
в) бесчисленное множество решений.

Решение:
а) Найдём главный определитель системы по правилу Крамера. Если он будет отличен от нуля, тогда система будет иметь лишь одно решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -a & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-3) + 3\cdot(-a)\cdot(-2) + 4\cdot 4\cdot(-1) - 4\cdot 2\cdot(-2) - 1\cdot(-a)\cdot(-1) - 3\cdot 4\cdot(-3) =$$

$$-6 + 6a - 16 + 16 - a + 36 = 5a + 30$$

Главный определитель зависит от *a*. Он обращается в ноль при *a*=-6.

б) Если $a \neq -6$, то $\Delta \neq 0$ и система имеет только одно решение при любом b. Если $a = -6$, то получим следующую систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = b \\ 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17 \end{cases}$, которой соответствует расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & b \\ 4 & 6 & -3 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-3)\ \times(-4) \\ \lrcorner + \\ \quad\quad \lrcorner + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -10 & 5 & b-24 \\ 0 & -10 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Умножим первую строку на (-3) и сложим со второй, первую строку умножим на (-4) и сложим с третьей.

Заметим, что две последних строки матрицы имеют одинаковую левую часть. Поэтому, чтобы система была совместна необходимо, чтобы правые части также совпадали. При этом возможны следующие варианты.

в) Если b =*25*, то два последних уравнения одинаковы. Опускаем одно из них, в результате чего исходная система трех уравнений сводится к системе двух уравнений, но с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ \quad -10x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений.

г) Если же $b \neq 25$, то система несовместна.

Ответ: Если $a \neq -6, b \in R$, то система имеет единственное решение.
Если $a = -6, b = 25$- система имеет бесконечное множество решений.
Если $a = -6, b \neq 25$- система решений не имеет.

Упражнения:

39. Решите системы, используя правило Крамера:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=29 \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=3 \\ 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+3x_3=-1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \\ 4x+3y+2z=16 \end{cases}$

40. При каких a и b система $\begin{cases} ax_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=b \end{cases}$

имеет:

а) единственное решение;
б) не имеет решения;
в) бесчисленное множество решений.

41. Решите систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2ax-3by+cz=0 \\ 3ax-6by+5cz=2abc \\ 5ax-4by+2cz=3abc \end{cases}$$

2.3. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

Пример 2.3.1. *Решить систему матричным методом* $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=4 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \\ 4x_1+x_2+4x_3=2 \end{cases}$

Решение:

а) Запишем систему в другом виде $A\cdot X=B$. Решение системы найдем из уравнения $X=A^{-1}\cdot B$. Выпишем столбец свободных членов $b=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и матрицу коэффициентов при неизвестных $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

б) Найдем определитель матрицы A.

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}=8-8+2-8-4+4=-6\neq 0$$

Таким образом, A^{-1} существует.

в) Определим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы А:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}=2,\ A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1&2\\4&4\end{vmatrix}=4,\ A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1&1\\4&1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\1&4\end{vmatrix}=6,\ A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&2\\4&4\end{vmatrix}=0,\ A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\4&1\end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\1&2\end{vmatrix}=-4,\ A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}=-2,\ A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}=3.$$

г) Составим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&6&-4\\4&0&-2\\-3&-6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-1&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

д) Следовательно,

$$x=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-1&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}-1+\frac{4}{3}\\-\frac{8}{3}+0+\frac{2}{3}\\2+1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Т.е. $x_1=-1$, $x_2=-2$, $x_3=2$.

е) Выполним проверку:

$$\begin{cases}2\cdot(-1)-(-2)+2\cdot 2=4\\-1+(-2)+2\cdot 2=1\\4\cdot(-1)+(-2)+4\cdot 2=2\end{cases}$$

Решение найдено верно.

Ответ: $\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-2\\x_3=2\end{cases}$

Упражнения:

42. Решите системы матричным способом:

а) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\2x_1-x_2+2x_3=-4\\4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}$; б) $\begin{cases}x+y-2z=6,\\2x+3y-7z=16\\5x+2y+z=16\end{cases}$; в) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\2x_1+3x_2+x_3=1\\2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}$

2.4. Однородные системы линейных алгебраических уравнений

Пример 2.4.1. *Решить однородную систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: чтобы решить однородную систему необходимо записать матрицу системы и с помощью элементарных преобразований привести её к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \times(-2) & \times(-3) \\ \lrcorner + & \\ & \lrcorner + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \lrcorner + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная однородная система $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ \qquad 3x_3 = 0 \end{cases}$, из нее видно, что решение единственно.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Пример 2.4.2. *Решить однородную систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \times(-2) & \times(-1) \\ \lrcorner + & \\ & \lrcorner + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \lrcorner + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2) \\ \lrcorner + \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная система:

$$\begin{cases} x_1 - \quad 4x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Найдем ее решение:

$$\begin{cases} x_1 - \quad 4x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 \\ 2x_2 = -7x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -\dfrac{7}{2}x_3 \end{cases}$$

Для того, чтобы сделать проверку необходимо найти одно частное решение системы. Пусть $x_3 = 2$, тогда $x_2 = -7$, а $x_1 = 8$.

Проверка:

$$\begin{cases} 2\cdot 8 + 2\cdot(-7) - 2 = 0 \\ 5\cdot 8 + 4\cdot(-7) - 6\cdot 2 = 0 \\ 3\cdot 8 + 2\cdot(-7) - 5\cdot 2 = 0 \end{cases}$$

Решение найдено верно.

Ответ: общее решение: $\begin{cases} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -\dfrac{7}{2}x_3 \\ x_3 = \textit{своб.н.} \end{cases}$

Упражнения:

43. Решите однородную систему линейных уравнений $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

44. Решите однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ -5x_1 - 22x_2 + 5x_3 + 43x_4 = 0 \end{cases}$$

2.5. Применение систем линейных алгебраических уравнений к решению экономических задач

Пример 2.5.1. Решить задачу методом Крамера. *Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 10 млн. условных денежных единиц. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 60 %, второго – на 45 %. В результате суммарная прибыль должна вырасти в 1,5 раза. Какова величина прибыли каждого из отделений: а) в прошлом году; б) в нынешнем году.*

Решение:

1. Составим экономико-математическую модель задачи:

   x – величина прибыли первого отделения в прошлом году.

   y – величина прибыли второго отделения в прошлом году.

   $1,6x$ – величина прибыли первого отделения в нынешнем году.

   $1,45y$ – величина прибыли второго отделения в нынешнем году.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 1,6x + 1,45y = 15 \end{cases}$$

2. Решим систему методом Крамера:

   $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1,6 & 1,45 \end{vmatrix} = 1,45 - 1,6 = -0,15 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение.

Для того, чтобы найти решение системы, найдем сначала значение определителей:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 15 & 1,45 \end{vmatrix} = 14,5 - 15 = -0,5;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1,6 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 16 = -1.$$

Определим решение системы:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-0,5}{-0,15} = 3\frac{1}{3}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-1}{-0,15} = 6\frac{2}{3}.$$

Данное решение показывает величину прибыли первого и второго отделения в прошлом году.

Найдем величину прибыли в нынешнем году:

$1,6 \cdot 3\frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$ млн. усл.ден.ед. - величина прибыли первого отделения в нынешнем году.

$1,45 \cdot 6\frac{2}{3} = 9\frac{2}{3}$ млн. усл.ден.ед. - величина прибыли второго отделения в нынешнем году.

Ответ:

а) $3\frac{1}{3}$ млн. усл.ден.ед. – величина прибыли первого отделения в прошлом году; $6\frac{2}{3}$ млн. усл.ден.ед. – величина прибыли второго отделения в прошлом году.

б) $5\frac{1}{3}$ млн. усл.ден.ед. – величина прибыли первого отделения в нынешнем году; $9\frac{2}{3}$ млн. усл.ден.ед. – величина прибыли второго отделения в нынешнем году.

Пример 2.5.2. Решить задачу матричным способом. *Перед торговым предприятием возникла проблема – в каком соотношении закупить оборудование А и В: можно закупить 5 единиц оборудования А и 8 единиц оборудования В – всего за 92 тыс. руб., а можно, наоборот, закупить 8 единиц оборудования А и 5 единиц оборудования В. Торговое предприятие остановилось на первом варианте, так как при этом экономится сумма, достаточная для закупки 2-х единиц оборудования А. Какова цена оборудования А и оборудования В?*

Решение:

1. Составим экономико-математическую модель задачи:
   x – цена оборудования A.
   y – цена оборудования B.
   $$\begin{cases} 5x+8y=92 \\ 8x+5y=92+2x \end{cases}$$
2. Решим систему матричным методом.
   $$\begin{cases} 5x+8y=92 \\ 8x+5y=92+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+8y=92 \\ 6x+5y=92 \end{cases}$$
   Выпишем матрицу-столбец свободных членов $b=\begin{pmatrix} 92 \\ 92 \end{pmatrix}$ и матрицу коэффициентов при неизвестных $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

а) Найдем определитель матрицы A.
Имеем
$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=25-48=-23\neq 0$$
Таким образом, A^{-1} существует.
б) Определим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A:
$A_{11}=(-1)^2\cdot 5=5,\ A_{12}=(-1)^3\cdot 6=-6,$
$A_{21}=(-1)^3\cdot 8=-8,\ A_{22}=(-1)^4\cdot 5=5$.

в) Составим обратную матрицу: $A^{-1}==-\frac{1}{23}\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{23} & \frac{8}{23} \\ \frac{6}{23} & -\frac{5}{23} \end{pmatrix}$

г) Следовательно,
$$x=\begin{pmatrix} -\frac{5}{23} & \frac{8}{23} \\ \frac{6}{23} & -\frac{5}{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 92 \\ 92 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Т.е. $x=12$, $y=4$.

Ответ: 12 тыс. руб. – цена оборудования A, 4 тыс.руб. – цена оборудования B.

Пример 2.5.3. Решить задачу методом Гаусса. *Фирмой было выделено 236 тыс. у. е. на покупку 29 предметов для оборудования офиса: нескольких компьютеров по цене 20 тыс. у. е. за компьютер, офисных столов по 8,5 тыс. у. е. за стол, стульев по 1,5 тыс. у. е. за стул. Позже выяснилось, что в другом месте компьютеры можно приобрести по 19,5 тыс. у.е., а столы по 8 тыс. у.е. (стулья по той же цене), благодаря чему на ту же сумму было куплено на 1 стол больше. Выясните, какое количество единиц каждого вида оборудования было приобретено.*

Решение:

1. Составим экономико-математическую модель задачи:
   x_1 – количество компьютеров.
   x_2 – количество столов.
   x_3 – количество стульев.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ 20x_1 + 8{,}5(x_2 - 1) + 1{,}5x_3 = 236 \\ 19{,}5x_1 + 8x_2 + 1{,}5x_3 = 236 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ 20x_1 + 8{,}5x_2 + 1{,}5x_3 = 244{,}5 \\ 19{,}5x_1 + 8x_2 + 1{,}5x_3 = 236 \end{cases}$$

2. Решим систему методом Гаусса.

Представим систему в виде расширенной матрицы: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 20 & 8{,}5 & 1{,}5 & 244{,}5 \\ 19{,}5 & 8 & 1{,}5 & 236 \end{array}\right)$.

«Обнулим» коэффициенты при x_1 во втором и третьем уравнениях. Для этого первую строку, умноженную на (-20), прибавим ко второй, а к третьей строке прибавим первую, умноженную на (-19,5):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 20 & 8{,}5 & 1{,}5 & 244{,}5 \\ 19{,}5 & 8 & 1{,}5 & 236 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \times(-20) & (-19{,}5) \\ \downarrow + & \\ & \downarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -11{,}5 & -18{,}5 & -355{,}5 \\ 0 & -11{,}5 & -18 & -349 \end{array}\right).$$

«Обнулим» теперь коэффициент при x_2 в третьей строке. Для этого, новую вторую строку, умноженную на (-1), прибавим к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -11{,}5 & -18{,}5 & -355{,}5 \\ 0 & -11{,}5 & -18 & -349 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \downarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -11{,}5 & -18{,}5 & -355{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 6{,}5 \end{array}\right).$$

В результате мы привели матрицу к ступенчатому виду. Найдем ранг основной матрицы до вертикальной черты. Ранг этой матрицы равен 3. Найдем ранг расширенной матрицы, ранг равен 3. Так как, ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, то система совместна и имеет решение. Выясним, сколько решений она имеет. Для этого определим число

неизвестных, их 3. Ранг равен числу неизвестных, следовательно, система определена и имеет единственное решение. Определим его.
Представим полученную систему уравнений в обычном виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ \quad -11{,}5x_2 - 18{,}5x_3 = -355{,}5 \\ \qquad 0{,}5x_3 = 6{,}5 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ \quad -11{,}5x_2 - 18{,}5 \cdot 13 = -355{,}5 \\ \qquad x_3 = 13 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 10 + 13 = 30 \\ \quad x_2 \quad = 10 \\ \qquad x_3 = 13 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = 13 \end{cases}$$

Ответ: Фирмой было приобретено 7 компьютеров, 10 столов и 13 стульев.

Задачи:

45. Обувная фабрика состоит из трех больших цехов: первый цех - производство кроссовок, второй цех – производство зимней обуви, третий цех – производство летней обуви. Суммарная величина прибыли цехов в прошлом году составила 130 млн. тенге. На этот год было запланировано увеличение прибыли от производства и реализации обуви первого цеха на 20%, второго – на 25%, третьего – на 30%. В результате суммарная прибыль обувной фабрики должна была вырасти на 33 млн. тенге по сравнению с минувшим годом. На самом деле, в этом году прибыль от производства и реализации обуви первого цеха увеличилась на 50%, второго – на 50%, третьего – на 60%. В результате суммарная прибыль обувной фабрики в этом году составила 199 млн. тенге. Какова величина прибыли каждого из отделений: 1) в минувшем году? 2) в текущем году? Какой цех дает большую прибыль? Сделайте выводы.

46. Кондитерская фабрика «Баян Сулу» предлагает следующие новогодние подарочные наборы шоколадных конфет по 1000 гр.: «Новогодняя сказка», «Вокруг елки», «Курочка ряба». Руководство некоторого предприятия выделило 395 000 тенге на покупку 265 подарочных наборов для детей сотрудников: нескольких подарочных наборов «Новогодняя сказка» по цене 1400 тенге за 1 шт., нескольких подарочных наборов «Вокруг елки» по 1500 тенге за 1 шт., нескольких подарочных наборов «Курочка ряба» по 1600 тенге за 1 шт. Выяснилось, что если предприятие делает заказ на количество подарков более 250 штук, то кондитерская фабрика предлагает ему скидку на подарочные наборы «Новогодняя сказка» в размере 100 тенге с 1 шт. и «Вокруг елки» в размере 50 тенге с 1 шт. На наборы «Курочка ряба» скидки нет. Таким образом, предприятие может приобрести подарочные наборы «Новогодняя сказка», «Вокруг елки», «Курочка ряба» сэкономив при этом 14500 тенге. Выясните, какое количество подарочных наборов каждого вида можно приобрести для детей сотрудников некоторого предприятия?

47. Бивалютная корзина стоимостью 34,05 руб. на 55 % состоит из доллара, а на 45% из евро. Если бы она на 55 % состояла из евро, а на 45 % из доллара, то ее стоимость была бы равна 34,95 руб. Чему равен курс евро? Чему равно отношение курса евро к курсу доллара?

48. Бивалютная корзина стоимостью 33,4 руб. на 55 % состоит из доллара, а на 45% из евро. Если бы она на 55 % состояла из евро, а на 45 % из доллара, то ее стоимость была бы равна 34,6 руб. Чему равен курс доллара? Чему равно отношение курса доллара к курсу евро?

49. Для пошива сарафанов, брюк и юбок было использовано 735 метров льна, 255 метров трикотажа и 420 метров жаккарда. Количество метров каждого вида материала, расходуемого на одно изделие, указано в таблице:

Изделие	Материал, м		
	Сарафан	Брюки	Юбка
лен	5	3	4
трикотаж	2	1	1
жаккард	3	2	2

Какое количество сарафанов, брюк и юбок можно изготовить, используя данное сырье?

50. Завод специализируется на выпуске двух видов часов, при этом используется два вида сырья. Количество сырья, выделенное на производство продукции, указано в таблице:

Сырье	Виды продукции		Количество сырья
	Ручные часы	Настенные часы	
S1	2	1	1000
S2	3	4	2000

Какое количество ручных часов и настенных часов необходимо выпустить заводу, используя указанное количество сырья?

51. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 3/8 вклада, который составляет 800 тыс.руб., вложили в первый банк, 1/8 во второй банк и оставшуюся часть вклада в третий банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 907 тыс.руб. Если бы первоначально 1/8 вклада положили в первый банк, 4/8 вклада во второй банк, оставшуюся часть вклада в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов стала бы равна 894 тыс.руб. Если бы 4/8 вклада положили в первый банк, 3/8 вклада – во второй банк, оставшуюся часть вклада – в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов была бы равна 903 тыс.руб. Какой процент начисляет каждый банк?

ТЕМА 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

3.1. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Пример 3.1.1. *Найти действительные числа* x *и* y *из условия равенства двух комплексных чисел:* $-2+5ix-3iy=9i+2x-4y$.

Решение: Выделим в обеих частях равенства действительные и мнимые части данных комплексных чисел:

$$-2+(5x-3y)i=2x-4y+9i.$$

Теперь, используя равенство комплексных чисел, составим систему

$$\begin{cases} 2x-4y=-2, \\ 5x-3y=9, \end{cases}$$

решив которую получим $x=3$, $y=2$.

Ответ: $x=3$, $y=2$.

Пример 3.1.2. *Найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел:*

а) $z=i$; б) $z=-5i$; в) $z=1+i$; г) $z=2-2i$.

Решение:

а) Здесь $a=0$, $b=1$. Находим модуль $r=\sqrt{0^2+1^2}=1$; $\varphi=\frac{\pi}{2}$, так как вектор, изображающий данное число, лежит на положительной полуоси Oy.

б) Здесь $a=0$, $b=-5$; находим $r=\sqrt{0^2+(-5)^2}=5$; $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, так как вектор, изображающий данное число, лежит на отрицательной полуоси Oy.

в) Здесь $a=1$, $b=1$ (точка, изображающая данное число, лежит в I четверти); $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $tg\varphi=\frac{b}{a}=1$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

г) Здесь $a=2$, $b=-2$ (IV четверть); $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$; $tg\varphi=\frac{b}{a}=-1$; $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.

Пример 3.1.3. *Найти все значения аргумента комплексных чисел: а)* $z=-4$*; б)* $z=1-i$.

Решение:

а) Здесь $a=-4$, $b=0$; находим $\arg(-4)=\pi+2\pi k,\quad k\in Z$.

б) Здесь $a=1$, $b=-1$; находим $\arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in Z$.

Пример 3.1.4. *Выполнить действия: а)* $(2+i)+(1-5i)$*; б)* $(3-2i)-(7+4i)$.

Решение:

а) По правилу сложения комплексных чисел получим

$$(2+i)+(1-5i)=(2+1)+(1-5)i=3-4i.$$

б) По правилу вычитания комплексных чисел получим

$$(3-2i)-(7+4i)=(3-7)+(-2-4)i=-4-6i.$$

Пример 3.1.5. *Вычислить: а)* i^{16}*; б)* i^{25}*; в)* i^{15}*; г)* $(-i)^8$*; д)* $(-i)^7$.

Решение:

а) $i^{16}=i^{4\cdot 4}=1$;

б) $i^{25}=i^{2\cdot 12+1}=1\cdot i^1=i$;

в) $i^{15}=i^{2\cdot 6+3}=1\cdot i^3=-i$;

г) $(-i)^8=i^8=i^{2\cdot 4}=1$;

д) $(-i)^7=-i^7=-i^{4+3}=-i^3=-(-i)=i$.

Пример 3.1.6. *Выполнить действия: а)* $-2i\cdot 5i$*; б)* $(2-5i)(2+5i)$*; в)* $(5-4i)(3+2i)$.

Решение:

а) $-2i\cdot 5i=-10i^2=-10\cdot(-1)=10$;

б) $(2-5i)(2+5i)=4-25i^2=4+25=29$;

в) По правилу умножения комплексных чисел получим

$$(5-4i)(3+2i)=[5\cdot 3-(-4)\cdot 2]+i[5\cdot 2+3(-4)]=23-2i.$$

Можно произвести умножение по правилу умножения многочленов:

$$(5-4i)(3+2i)=15+10i-12i+8=23-2i.$$

Пример 3.1.7. *Выполнить действия: а)* $\frac{2}{7i}$*; б)* $\frac{1}{1+i}$*; в)* $\frac{1+i}{1-i}$*; г)* $\frac{2-3i}{3+7i}$.

Решение:

а) Умножив делимое и делитель на i, получим

$$\frac{2}{7i}=\frac{2i}{7i\cdot i}=\frac{2i}{-7}=-\frac{2}{7}i.$$

б) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1-i^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

в) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$.

г) $\frac{2-3i}{3+7i}=\frac{(2-3i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)}=\frac{6-14i-9i+21i^2}{9+49}=\frac{-15-23i}{58}=-\frac{15}{58}-\frac{23}{58}i$.

Пример 3.1.8. *Вычислить* $(1+i)^8$.

Решение: Используя соотношение, полученное в предыдущем примере $(1+i)^2=2i$, получим

$(1+i)^8=\left[(1+i)^2\right]^4=(2i)^4=16i^4=16$.

Упражнения:

52. Построить радиус-векторы, соответствующие комплексным числам:
а) $z=2$; б) $z=-3$; в) $z=3i$; г) $z=-2i$; д) $z=2+3i$.

53. Даны числа: а) $6\sqrt{3}-6i$; б) $2+4i$; в) $-\sqrt{5}i$; г) $3-\sqrt{10}$; д) 11. Назовите числа, сопряженные и противоположные данным.

54. Найдите x и y из равенства:
а) $2y+6xi=14-12i$; б) $(2x+3y)+(x-y)i=33+4i$; в) $x+(2x-y)i=3-i$.

55. Произведите сложение комплексных чисел:
а) $(2-5i)+(5+3i)$; б) $(-1+4i)+(5-3i)$; в) $(7-3i)+(6+i)$;
г) $(-4+3i)+(4+3i)$; д) $(5+2i)+(-4+3i)$; е) $(-3-5i)+(5-2i)$.

56. Произведите умножение комплексных чисел:
а) $(2+5i)\cdot(3-2i)$; б) $(5+3i)\cdot(4+i)$; в) $(1-2i)\cdot(4-i)$; г) $(-2+i)\cdot(3+5i)$;
д) $(1+i)\cdot(1-i)$; е) $(8+2i)\cdot 3i$; ж) $(2+3i)\cdot(-5i)$.

57. Выполните действия:
а) $(3+5i)^2$; б) $(2-7i)^2$; в) $(6+i)^2$; г) $(3+2i)^3$; д) $(4+2i)^3$; е) $(5-i)^3$.

58. Выполните деление:
а) $\frac{5i}{3+2i}$; б) $\frac{3-i}{5-3i}$; в) $\frac{3+2i}{5i}$; г) $\frac{3-7i}{3+2i}$; д) $\frac{2+3i}{2-3i}$; е) $\frac{-2i}{5-i}$.

59. Выполните действия:
а) $\frac{(2+3i)-(5+7i)}{2+3i}$; б) $\frac{3+2i}{3-2i}+\frac{5+2i}{3+2i}$; в) $\frac{6+2i}{3-7i}-\frac{2+3i}{2+5i}$; г) $\frac{6+2i}{1-i}-i^{27}$;
д) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$; е) $-i\sqrt{5}\cdot 4i\sqrt{5}$; ж) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; и) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$;
к) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)$.

3.2. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Пример 3.2.1. *Представить в тригонометрической форме следующие числа: а) 2; б)* $6i$*; в)* $-2+2\sqrt{3}i$.

Решение:

а) Здесь $a=2$, $b=0$, $r=2$. Так как вектор, изображающий число 2 лежит на положительной полуоси Ox, то главное значение аргумента $\varphi=0$, следовательно,

$$2=2(\cos 0+i\sin 0)$$

или

$$2=2(\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k),\ k\in Z.$$

б) Здесь $a=0$, $b=6$, $r=6$. Поскольку вектор, изображающий число $6i$, лежит на положительной полуоси Oy, главное значение аргумента $\varphi=\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$6i=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

или

$$6i=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right],\ k\in Z.$$

в) Здесь $a=-2$, $b=2\sqrt{3}$, $r=4$. Точка, изображающая число z, лежит во II четверти; $tg\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3},\ \varphi=\frac{2\pi}{3}$. Значит,

$$-2+2\sqrt{3}i=4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

или

$$-2+2\sqrt{3}i=4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\right],\ k\in Z.$$

Пример 3.2.2. *Представить в алгебраической форме числа:*

а) $z=2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$*; б)* $z=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.

Решение:

а) Подставив значения $\cos 2\pi=1$, $\sin 2\pi=0$ в данное равенство, получим $z=2(1+i\cdot 0)=2$.

б) Имеем

$$z=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=-1+i.$$

Пример 3.2.3. *Найти произведение* $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

Решение: Получаем

$$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]=2\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=6\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=6\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}.$$

Пример 3.2.4. *Выполнить деление:*

$$10\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]:2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Решение: Получаем

$$10\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]:2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{10}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=5(0+i)=5i.$$

Пример 3.2.5. *Возвести в степень: а)* $\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$ *; б)* $\left[\frac{3}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right]^{10}$.

Решение: а) По формуле Муавра получим

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=\cos\left[6\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+i\sin\left[6\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1.$$

б) Представим данное число в тригонометрической форме. Здесь $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $r=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$. Точка, изображающая данное число, лечит в IV четверти, поэтому $tg\varphi=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\left(\frac{3}{2}\right)$, т.е. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. Итак,

$$\frac{3}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i=\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Следовательно,

$$\left\{\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}^{10}=3^5\left[\cos\left(-10\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-10\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right]=3^5\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]=$$

$$3^5\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right)\right]=243\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=243\left[\frac{1}{2}-i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=121{,}5\left(1-i\sqrt{3}\right).$$

Пример 3.2.6. *Извлечь корни из комплексных чисел: а)* $\sqrt{i}$ *; б)* $\sqrt[3]{1}$.

Решение: а) Представим число i в тригонометрической форме: $i=0+1\cdot i=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Получим

$$z_k=\sqrt{i}=\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right),\ k=0,1;$$

если $k=0$, то $z_0=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i;$

если $k=1$, то $z_1=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i.$

б) Представим число 1 в тригонометрической форме: $1=\cos 0+i\sin 0$. Находим

$$z_k=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}=\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2;$$ если $k=0$, то $z_0=\cos 0+i\sin 0=1;$

если $k=1$, то $z_1=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i;$

если $k=2$, то $z_2=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$

Упражнения:

60. Найдите произведение комплексных чисел в тригонометрической форме:

а) $3\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\right];$

б) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right];$

в) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right];$

г) $8\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\frac{1}{16}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right];$

д) $\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\cdot\frac{1}{5}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right];$

е) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]\cdot\frac{3}{14}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right].$

61. Выполните деление в тригонометрической форме:

а) $\left(3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]\right):\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right];$

б) $\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right):\left(2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]\right);$

в) $\left(2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right):\left(4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right);$

г) $\left(4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]\right):\left(\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\right);$

д) $\left(4\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\right):\left(\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\right).$

62. $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$ Найти z^4.

63. $z=3\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$. Найти z^3.

64. Возведите в степень $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6$

65. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $3i$; б) $-1+i$; в) $1-i\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}-i$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)i$.

66. Представьте в алгебраической форме числа:

а) $5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$; б) $4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; в) $\cos\pi+i\sin\pi$;

г) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$; д) $3(\cos 0+i\sin 0)$.

67. Вычислите: а) $(1-i)^{12}+(1+i)^{12}$; б) $\frac{(1+i)^8-(1-i)^8}{(1+i)^8\cdot(1-i)^8}$.

68. Извлеките корни: а) $\sqrt[3]{-1}$; б) $\sqrt[4]{-1}$; в) $\sqrt[3]{i}$; г) $\sqrt[4]{4}$; д) $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$; е) $\sqrt[6]{1}$.

3.3. Показательная функция с комплексным показателем. Формулы Эйлера

Пример 3.3.1. *Найти: а)* $e^{i\pi/4}$*; б)* $e^{\pi e^{-i\pi/2}}$*; в)* $e^{2+i\pi}$.

Решение:

а) $e^{i\pi/4}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $e^{\pi e^{-i\pi/2}}=e^{\pi[\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)]}=e^{-\pi i}=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=-1$;

в) $e^{2+i\pi}=e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^2$.

Пример 3.3.2. *Представить в показательной форме числа:*
а) $z=2i$*; б)* $z=-1+i$.

Решение:

а) Здесь $a=0$, $b=2$, $r=2$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Получаем, $z=2e^{i\pi/2}$.

б) Здесь $a=-1$, $b=1$, $r=\sqrt{2}$, $tg\varphi=-1$ $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. Получаем, $z=\sqrt{2}e^{3\pi/4}$.

Пример 3.3.3. *Представив числа* $z_1 = 1 + i$ *и* $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ *в показательной форме, вычислить:*

а) $z_1 \cdot z_2$*; б)* $\dfrac{z_1}{z_2}$*; в)* z_1^6*; г)* $\sqrt[4]{z_1}$.

Решение:

Для числа $z_1 = 1 + i$ имеем: $a = 1$, $b = 1$, $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, т.е. $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Для числа $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ имеем: $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $r = 2$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$, т.е. $z_2 = 2e^{-i\pi/3}$.

а) $z_1 z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \cdot 2e^{-i\pi/3} = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/12}$.

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4-(-i\pi/3)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{7\pi i/12}$.

в) $z_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^6 = 8e^{i3\pi/2}$.

г) $z_k = \sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+2\pi k)i/4}$, $k = 0, 1, 2, 3;$

если $k = 0$, то $z_0 = \sqrt[8]{2}e^{i\pi/16}$;

если $k = 1$, то $z_1 = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+2\pi)i/4} = \sqrt[8]{2}e^{9\pi i/16}$;

если $k = 2$, то $z_2 = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+4\pi)i/4} = \sqrt[8]{2}e^{17\pi i/16} = \sqrt[8]{2}e^{-15\pi i/16}$;

если $k = 3$, то $z_3 = \sqrt[8]{2}e^{(\pi/4+6\pi)i/4} = \sqrt[8]{2}e^{25\pi i/16} = \sqrt[8]{2}e^{-7\pi i/16}$.

Упражнения:

69. Найдите: а) e^i; б) $e^{i\pi}$; в) e^{1+i}; г) $e^{i\pi/2}$; д) $e^{i\pi/3}$; е) e^{4+3i}; ж) e^{2-i}; и) e^{3i-2}.

70. Найдите: а) $\sin i$; б) $\cos(1 + i)$; в) $\sin(1 - i)$.

71. Представьте в показательной форме числа: а) 1; б) $\sqrt{3} + i$; в) $3 + i\sqrt{3}$; г) $-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.

72. Представив числа $z_1 = \sqrt{3} + i$ и $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ в показательной форме, вычислите:

а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\dfrac{z_1}{z_2}$; в) z_2^4; г) $\sqrt[3]{z_1}$; д) $\sqrt[4]{z_2}$.

ТЕМА 4. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Координаты вектора. Длина вектора. Правила действий над векторами, заданными своими координатами.

Пример 4.1.1. *Даны векторы* $\vec{a}(2;\,-2;\,1)$ *и* $\vec{b}(3;\,-4;\,5)$. *Найти* $\vec{a}+\overrightarrow{2b}$

Решение: $\vec{a}+\overrightarrow{2b}=(2;-2;1)+2(3;-4;5)=(2+6;-2-8;1+10)=(8;-10;11)$

Ответ: $\vec{a}+\overrightarrow{2b}=(8;-10;11)$.

Пример 4.1.2. *Коллинеарны ли векторы* $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$, *разложенные по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *где* $\overrightarrow{c_1}=5\overrightarrow{a}+3\vec{b},\ \overrightarrow{c_2}=4\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}=(2;-1;5),\ \vec{b}(7;1;-3)$

Решение:

1. Вычислим проекции векторов $\vec{c}_1,\vec{c}_2$ на оси координат:

$\overrightarrow{c_1}=5\overrightarrow{a}+3\vec{b}=(5\cdot2+3\cdot7;\ 5\cdot(-1)+3\cdot1;\ 5\cdot5+3\cdot(-3))=(31;-2;16)$

$\overrightarrow{c_2}=4\overrightarrow{a}+\vec{b}=(4\cdot2+7;\ 4\cdot(-1)+1;\ 4\cdot5+(-3))=(15;-3;17)$

2. Два вектора коллинеарны, если их проекции на оси координат пропорциональны, следовательно, проверим пропорциональность проекций векторов на оси координат:

$\frac{\vec{c}_1}{\vec{c}_2}=\frac{31}{15}\neq\frac{-2}{-3}\neq\frac{16}{17},\Rightarrow\vec{c}_1,\vec{c}_2$ не коллинеарны.

Пример 4.1.3. *Вычислить длину вектора* $\vec{a}(6;\,3;\,-2)$.

Решение:

$|\vec{a}|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7$

Ответ: 7.

Упражнения:

73. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если A(-1; -2; -3), B(4; 5; -1).

74. Найдите координаты точки A, если $\overrightarrow{AB}$ (0; 3; -5), B(-1; 2; -4).

75. Найдите координаты точки B, если $\overrightarrow{AB}$ (2; -5; 7), A(9; -1; -6).

76. Найдите сумму векторов $\vec{a}(1;\,2;\,5)$ и $\vec{b}(-3;\,4;\,-2)$.

77. Найдите разность векторов $\vec{a}(5;\,-3;\,-7)$ и $\vec{b}(0;\,4;\,7)$.

78. Зная координаты векторов $\vec{a}(2;\,3;\,-4)$, $\vec{b}(-1;\,2;\,1)$ и $\vec{c}(3;\,0;\,2)$, найдите координаты векторов:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{c}$; в) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; г) $3\vec{a}$; д) $-\vec{a}+2\vec{c}$; е) $2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

79. Найдите длины векторов: а) $\vec{a}(2;\ 4;\ 4)$; б) $\vec{b}(-1;\ 0;\ -3)$.

80. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}(1;\ -2;\ 3)$ и $\vec{b}(-1;\ 2;\ -3)$.

81. Найдите длину вектора $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}(2;\ 0;\ 0)$ и $\vec{b}(1;\ 1;\ -1)$.

82. Найдите периметр треугольника, образованного векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$, если A(8; 0; 6), B(8;-4;6), C(6; -2; 5).

83. Вершинами треугольника служат точки A(10; -2; 8), B(8;0;7) и C(10; 2; 8). Вычислите периметр треугольника.

84. Проверьте, коллинеарны ли векторы: 1) $\vec{a}\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{3};\frac{4}{5}\right)$ и $\vec{b}\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{2};\frac{6}{5}\right)$;
2) $\vec{c}\left(-6;\frac{1}{3};3\right)$ и $\vec{d}\left(-2;\frac{1}{9};-\frac{1}{3}\right)$.

85. При каких значениях n и p векторы $\vec{a}(-3;\ n;\ 4)$ и $\vec{b}(-2;\ 4;\ p)$ коллинеарны?

4.2. Скалярное произведение векторов

Пример 4.2.1. *Найти скалярное произведение (3$\vec{a}$ - 2$\vec{b}$)·(5$\vec{a}$ - 6$\vec{b}$), если* $|\vec{a}|=2,\quad |\vec{b}|=4,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=\pi/3.$

Решение:
$(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b}) = 15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} =$
$15|\vec{a}|^2-28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+12|\vec{b}|^2=15\cdot 4-28\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}+ 12\cdot 16 = 60 - 112 + 192 = 252 - 112 = 140$

Ответ: 140.

Пример 4.2.2. *Найти угол между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *если* $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(6;4;-2)$.

Решение:
Т.к. $\vec{a}$ = (1; 2; 3), $\vec{b}$ = (6; 4; -2), то $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 6 + 8 – 6 = 8.
$|\vec{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14};\qquad |\vec{b}|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}$.

$cos\ \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}}=\frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7};\qquad \varphi=\arccos\frac{2}{7}.$

Ответ: $\varphi=\arccos\frac{2}{7}$.

Пример 4.2.3. *Найти* $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, *если* $|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad \vec{a} \perp \vec{b}$.

Решение:

$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Ответ: 13.

Пример 4.2.4. *При каком* m *векторы* $\vec{a} = (m; 2; 0)$ *и* $\vec{b} = (1; -3; 2)$ *перпендикулярны.*

Решение: $\vec{a}\cdot\vec{b} = m\cdot 1 + 2\cdot(-3) + 0\cdot 2 = 0; \quad \Rightarrow m = 6$

Ответ: 6.

Пример 4.2.5. *Найти скалярное произведение векторов* $\vec{a}(2; -3; 1)$ *и* $\vec{b}(-1; -2; 5)$.

Решение: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-1) + (-3)\cdot(-2) + 1\cdot 5 = -2 + 6 + 5 = 9$

Ответ: 9.

Упражнения:

86. Найдите скалярное произведение векторов $p = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $q = 5\vec{a} - 3\vec{b}$, если их длины $|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

87. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\vec{a}(1; 2; -5)$ и $\vec{b}(4; 8; -1)$; б) $\vec{c}(5; -2; -3)$ и $\vec{d}(-2; -6; -3)$.

88. Даны точки *A*(-2; 4; 3), *B*(3; -6; -1), *C*(4; -2; -2), *D*(1; 5; 0). Вычислите скалярное произведение $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

89. Докажите, что вектора $\vec{a}(1; 2; 0)$ и $\vec{b}(2; -1; 10)$ ортогональны.

90. Найдите значение числа n при котором векторы $\vec{a}(2; 4; 1)$ и $\vec{b}(n; 1; -8)$ будут ортогональны.

91. Найдите угол между векторами: а) $\vec{a}(-2; 2; -1)$ и $\vec{b}(-6; 3; 6)$; б) $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(1; -1; 2)$ и $\vec{b}(0; 2; 1)$.

92. В треугольнике *ABC*, где *A*(1; 1; 1), *B*(2; 2; 1), *C*(2; 1; 2), найдите угол *BAC*.

93. В треугольнике *ABC*, где *A*(1; 1; 5), *B*(-2; 0; 7), *C*(-3; -2; 5), найдите угол *ACB*.

94. Найдите проекцию вектора $\vec{a}(1;\ 4;\ 0)$ на вектор $\vec{b}(4;\ 2;4)$.

95. Дан треугольник: *A*(2; 4; 5), *B*(-3; 2; 2), *C*(-1; 0; 3). Покажите, что $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{BC}$.

4.3. Векторное произведение векторов

Пример 4.3.1. *Найти модуль векторного произведения* $\vec{a} \times \vec{b}$*, если* $|\vec{a}| = 4,\quad |\vec{b}| = 5,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = 30^0.$

Решение:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 30^0 = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

Ответ: 10.

Пример 4.3.2. *Найти векторное произведение векторов* $\vec{a}$ *= (2; 5; 1) и* $\vec{b}$ *= (1; 2; -3).*

Решение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}\ .$$

Ответ: (-17; 7; -1)

Пример 4.3.3. *Вычислить площадь треугольника с вершинами A(1, 1, 1), B(5, 0, 4), C(0, 2, 0).*

Решение:

$$\overrightarrow{AC} = (0-1;\ 2-1;\ 0-1) = (-1;1;-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (5-1;\ 0-1;\ 4-1) = (4;-1;3)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(3-1) - \vec{j}(-3+4) +$$

$$+\vec{k}(1-4) = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \frac{\sqrt{14}}{2}\ (\text{ед}^2)$$

Ответ: $S_\Delta = \dfrac{\sqrt{14}}{2}\ (\text{ед}^2)$

Пример 4.3.4. *Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a} + 3\vec{b};\quad 3\vec{a} + \vec{b}$*, если* $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1;\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = 30^0.$

Решение:

$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}=8\vec{b}\times\vec{a}$

$S=8\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\sin 30^0=4$ (ед^2).

Ответ: 4 (ед^2).

Упражнения:

96. Найдите модуль векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2,\quad |\vec{b}|=5,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=90^0.$

97. Найдите модуль векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=8,\quad \vec{a}\wedge\vec{b}=150^0.$

98. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a}$ = (-1; 5; -4) и $\vec{b}$ = (1; -1; 2).

99. Найдите площадь треугольника образованного векторами $\vec{a}$ = (-1; 1; -3) и $\vec{b}$ = (2; 2; -1).

100. Вычислите площадь треугольника с вершинами A(-1, -2, -3), B(1, 1, -2), C(-3, -2, 1).

101. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

102. Докажите, что четырехугольник, образованный вершинами A(1, 4, 3), B(2, 3, 5), C(2, 5, 1) и D(3; 4; 3) является параллелограммом.

103. Выясните, является ли четырехугольник, образованный вершинами A(3, -1, 2), B(1, 2, -1), C(-1, 1, -3) и D(3; -5; 3), трапецией.

104. На векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=-\vec{j}+\vec{k}$ построен параллелограмм. Вычислите острый угол между диагоналями.

105. Зная векторы $\overrightarrow{BA}=(-1;2;0)$; $\overrightarrow{BC}=(-3;4;2)$, вычислите длину высоты AD треугольника ABC.

4.4. Смешанное произведение векторов

Пример 4.4.1. *Доказать, что векторы* $\vec{a}=7\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}+8\vec{k}$ *и* $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ *компланарны.*

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-7)\cdot 2 + (-1)\cdot 8\cdot 7 + 3\cdot(-3)\cdot 1 - 1\cdot(-7)\cdot 7 - 3\cdot(-1)\cdot 2 - 8\cdot(-3)\cdot 1 = 0$$

Т.к. определитель, составленный из координат этих векторов равен 0, т.е. смешанное произведение векторов равно 0, то векторы компланарны.

Пример 4.4.2. *Доказать, что точки A(4; 3; 0), B(2; -3; 1), C(8; 0; -2), D(0; 1; 2) лежат в одной плоскости.*

Решение: Найдем координаты векторов:
$$\overrightarrow{AB} = (-2;-6;1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (4;-3;-2)$$
$$\overrightarrow{AD} = (-4;-2;2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 48 - 8 - 12 + 8 + 48 = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример 4.4.3. *Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(2; 3; 5), B(0; 1; 2), C(7; 1; 5), D(4; 8; 3).*

Решение:

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA} = (2;2;3)$; $\overrightarrow{BD} = (4;7;1)$; $\overrightarrow{BC} = (7;0;3)$

Объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|42 + 14 + 0 - 147 - 24 - 0| = \frac{1}{6}|-115| = \frac{115}{6}\ (ед^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 7 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(21-0) - \vec{j}(12-7) + \vec{k}(0-49) = 21\vec{i} - 5\vec{j} - 49\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{21^2 + (-5)^2 + (-49)^2} = \sqrt{441 + 25 + 2401} = \sqrt{2867}$$

$$S_{осн} = \frac{\sqrt{2867}}{2}\ (ед^2)$$

Т.к. $V = \dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h = \dfrac{3V}{S_{осн}} = \dfrac{115}{\sqrt{2867}} = \dfrac{115\sqrt{2867}}{2867}\ (ед)$

Ответ: $\frac{115\sqrt{2867}}{2867}\,(ed)$.

Упражнения:

106. Даны точки $A\,(12;3;4)$, $B\,(-6;-4;3)$, $C\,(-1;-5;4)$, $D\,(-3;5;-1)$. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$.

107. Даны координаты вершин пирамиды *ABCO*:
$A(1;-1;6), B(4;5;-2), C(-1;3;0), O(6;1;5)$.
Определите:
а) угол между ребрами *AB* и *AO*;
б) площадь грани *ABC*;
в) объем пирамиды.

108. Даны координаты вершин пирамиды *SABC*:
$A(4;0;1), B(5;-1;1), C(4;7;-5), S(7;5;2)$
Определите:
а) площадь основания *ABC*;
б) высоту пирамиды;
в) объем пирамиды.

109. Докажите, что точки $A(1;2;-1), B(2;3;-2), C(-1;4;-1), D(1;0;0)$ лежат в одной плоскости.

110. При каком значении *x* будут компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, где $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, если $\vec{c}=(2;-1;x)$, $\vec{b}=(4;-5;-3)$, $A(1;-2;-3)$, $B(2;-3;-1)$.

4.5. Линейная зависимость векторов

Пример 4.5.1. *Являются ли векторы* $\overrightarrow{a_1}=(1;3;1;3)$, $\overrightarrow{a_2}=(2;1;1;2)$, $\overrightarrow{a_3}=(3;-1;1;1)$ *линейно зависимыми.*

Решение: Составим векторное равенство:

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\overrightarrow{a_2}+\lambda_3\overrightarrow{a_3}=0.$$

Запишем в виде вектор-столбцов:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-1)\times(-3) \\ \hookleftarrow + \\ \quad\hookleftarrow + \\ \quad\hookleftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \quad\times(2) \\ \hookleftarrow + \\ \quad\hookleftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \qquad \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases} \qquad \text{Если} \quad \begin{array}{l} \lambda_3 = C, \text{то} \\ \lambda_2 = -2C, \\ \lambda_1 = C, \end{array} \qquad C \text{ – произвольное число.}$$

Пусть $C=1$, тогда: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1,$ следовательно, эти векторы – линейно зависимые.

Пример 4.5.2. *В базисе* $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ *заданы векторы* $\vec{a_1} = (1;1;0)$; $\vec{a_2} = (1;-1;1)$; $\vec{a_3} = (-3;5;-6)$. *Показать, что векторы* $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ *образуют базис.*

Решение: Векторы $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ должны быть линейно независимыми. Составим векторное равенство:

$$\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \lambda_3 \vec{a_3} = 0.$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0, \\ \qquad \lambda_2 - 6\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times(-1) \\ \hookleftarrow + \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \times 1/2 \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \hookleftarrow + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ следовательно, } \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0, \\ \qquad \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, \\ \qquad\quad -2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – единственное нулевое решение.

Таким образом, векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ образуют систему линейно независимых векторов и, следовательно, составляют базис.

Пример 4.5.3. *Вектор* $\vec{b} = (4; -4; 5)$, *заданный в базисе* $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, *выразить в базисе* $\overrightarrow{a_1} = (1;1;0)$; $\overrightarrow{a_2} = (1;-1;1)$; $\overrightarrow{a_3} = (-3;5;-6)$.

Решение: Связь между базисами:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \\ \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \\ \overrightarrow{a_3} = -3\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} - 6\overrightarrow{e_3}. \end{cases}$$

Матрица перехода от базиса $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ к базису $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

Для этого найдем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 3 - 0 - 5 + 6 = 4 \neq 0$

А теперь вычислим все алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Составляем обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$.

Новые координаты вектора $\vec{b} = (0{,}5; 2; -0{,}5)$ в базисе $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$. Вектор $\vec{b}$ может быть представлен в виде: $\vec{b} = 0{,}5\overrightarrow{a_1} + 2\overrightarrow{a_2} - 0{,}5\overrightarrow{a_3}$.

Упражнения:

111. Выясните, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой: $\vec{e_1} = (3;5;1;4)$, $\vec{e_2} = (-2;1;-5;-7)$, $\vec{e_3} = (-1;-2;0;-1)$

112. Векторы заданы координатами: $\vec{a} = (5;8;6)$, $\vec{e_1} = (2;3;1)$, $\vec{e_2} = (1;3;1)$, $\vec{e_3} = (-1;-2;1)$. Убедитесь, что тройка $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ образует базис R^3, и найдите координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

113. Выясните, разлагается ли вектор $\vec{a}$ по системе векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:
$\vec{a} = (2;7;17;0)$, $\vec{e_1} = (2;4;3;0)$, $\vec{e_2} = (-3;0;1;3)$, $\vec{e_3} = (1;-1;10;-3)$.

114. Найдите все значения a, при которых вектор $\vec{b}$ разлагается по системе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$: $\vec{b} = (2;a;3)$, $\vec{e_1} = (1;2;1)$, $\vec{e_2} = (3;4;5)$, $\vec{e_3} = (4;5;7)$.

115. Выясните, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой:

а) $\vec{e_1} = (-4;2;8)$, $\vec{e_2} = (14;-7;-28)$

б) $\vec{e_1} = (2;-1;3;5)$, $\vec{e_2} = (6;-3;3;15)$

в) $\vec{e_1} = (-7;5;19)$, $\vec{e_2} = (-5;7;-7)$, $\vec{e_3} = (-8;7;14)$

г) $\vec{e_1} = (-1;7;1;-2)$, $\vec{e_2} = (2;3;2;1)$, $\vec{e_3} = (4;4;4;-3)$, $\vec{e_4} = (1;6;-1;1)$

4.6. Применение векторов к решению экономических задач

Пример 4.6.1. *Предприятие выпускает 4 вида продукции C_1, C_2, C_3, C_4 в количествах 40, 70, 20, 130 ед. При этом нормы расхода сырья составляют соответственно 6; 2,5; 9; 5 кг. Определите суммарный расход сырья и его изменение при изменениях выпуска продукции C_1, C_2, C_3, C_4 соответственно на +4; -3; -2; +8 ед.*

Решение:

Обозначим вектор выпуска продукции $\vec{x} = (40;70;20;130)$, а вектор расхода сырья $\vec{y} = (6;2{,}5;9;5)$. Тогда суммарный расход сырья S есть скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, т.е. $S = 40 \cdot 6 + 70 \cdot 2{,}5 + 20 \cdot 9 + 130 \cdot 5 = 1245$ (кг)

По свойству скалярного произведения векторов изменение суммарного расхода сырья

$\Delta S = (x + \Delta x, y) - (x, y) = (\Delta x, y) = +4 \cdot 6 - 3 \cdot 2{,}5 - 2 \cdot 9 + 8 \cdot 5 = 38{,}5$ (кг)

Ответ: 38,5 кг.

Задачи:

116. Известны векторы окладов (в усл. ден. ед.) шести работников за январь и за февраль: $p_{янв}$ = (4850, 4500, 6250, 5200, 5550, 8350) , $p_{фев}$ = (4950, 5000, 6300, 5400, 6100, 9000) . В марте этим работникам предоставили отпуск, заплатив им по среднему заработку за январь и февраль. Найти вектор выданных сумм за март, с учетом, начисления в январе премии в размере 25% от оклада и удержания подоходного налога в январе и феврале месяце.

117. Коммерческий банк, участвующий в строительстве сети социальных аптек в Челябинске, предпринял усилия по получению кредитов в 4 коммерческих банках: «Сбербанк», «Альфа-банк», «ВТБ», «Россельхозбанк». Каждый из них предоставил кредиты в размерах соответственно 10, 30, 20 и 40 млрд. руб. под годовую процентную ставку 25, 15, 30 и 20%. Нужно определить, сколько придется платить по истечении года за кредиты, взятые у банков?

118. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в таблице:

Вид изделия, №п\п	Количество изделий, ед.	Расход сырья, кг.	Нормы времени изготовления, ч\изд.	Цена изделия, ден.ед.\изд.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Требуется определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

119. Текстильная фабрика выпускает за смену 30 комплектов постельного белья, 150 полотенец, 100 ночных сорочек, 80 пижам. В следующем месяце планируется увеличить объемы производства на 30%. Найти выручку фабрики в следующем месяце при цене 440 руб. за комплект постельного белье, 20 руб. за полотенце, 150 руб. за ночную сорочку, 390 руб. за пижаму.

ТЕМА5. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЛОСКОСТЬ

5.1. Способы задания прямой на плоскости

Пример 5.1.1. *Составить уравнение прямой, если ее угловой коэффициент* $k=2$*, а* $b=3$.
Решение: Воспользуемся формулой $y=kx+b \Rightarrow y=2x+3$ или $2x-y+3=0$
Ответ: $2x-y+3=0$

Пример 5.1.2. *Дана прямая* $3x+4y-12=0$. *Составить для нее уравнение «в отрезках».*
Решение: Приведем данное уравнение к уравнению прямой «в отрезках»:
$$3x+4y=12 \Rightarrow \frac{3x}{12}+\frac{4y}{12}=1 \Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$$
Ответ: $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

Пример 5.1.3. *Составить уравнение прямой, проходящей через 2 точки* $A(3;-2)$ *и* $B(4;1)$.
Решение: Воспользуемся формулой $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.
$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y+2}{1+2} \Rightarrow \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{3} \Rightarrow 3(x-3)=y+2 \Rightarrow 3x-y-11=0$$
Ответ: $3x-y-11=0$

Пример 5.1.4. *Даны точки* $A(1;-1)$, $B(3;3)$, $C(4;5)$ *лежащие на одной прямой. Определить отношение* λ, *в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.*
Решение: Воспользуемся формулой $x=\frac{x_1+\lambda \cdot x_2}{1+\lambda}$
$$\lambda_1=\frac{AB}{BC} \Rightarrow 3=\frac{1+4\cdot\lambda_1}{1+\lambda_1} \Rightarrow 3\cdot(1+\lambda_1)=1+4\cdot\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1=2$$
$$\lambda_2=\frac{AC}{CB} \Rightarrow 4=\frac{1+3\cdot\lambda_2}{1+\lambda_2} \Rightarrow 4\cdot(1+\lambda_2)=1+3\cdot\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2=-3$$
$$\lambda_3=\frac{BA}{AC} \Rightarrow 1=\frac{3+4\cdot\lambda_3}{1+\lambda_3} \Rightarrow 1\cdot(1+\lambda_3)=3+4\cdot\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3=-\frac{2}{3}$$
Ответ: $\lambda_1=2;\ \lambda_2=-3;\ \lambda_3=-\frac{2}{3}$

Пример 5.1.5. *Даны точки* $A(-1;5)$ *и* $B(3;2)$. *Найти координаты точки N, симметричной точке B относительно точки A.*

Решение: Воспользуемся формулами $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$$x_A = \frac{x_N + x_B}{2} \Rightarrow x_N = 2x_A - x_B = 2\cdot(-1) - 3 = -5$$

$$y_A = \frac{y_N + y_B}{2} \Rightarrow y_N = 2y_A - y_B = 2\cdot 5 - 2 = 8$$

Ответ: $N(-5;8)$

Пример 5.1.6. *Найти расстояние между двумя точками* $A(-4;2)$ *и* $B(-4;-6)$.

Решение: $|AB| = \sqrt{(-4+4)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{0+64} = \sqrt{64} = 8$

Ответ: 8.

Пример 5.1.7. *Найти точку пересечения прямых* $3x - 2y + 5 = 0$ *и* $2x - y - 3 = 0$.

Решение: Чтобы найти точку пересечения прямых, нужно решить систему, составленную из уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4x + 6 + 5 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 19 \end{cases}$$

получим x=11 и y=19. Следовательно, (11; 19) – точка пересечения этих прямых.

Ответ: (11; 19)

Пример 5.1.8. *Найти расстояние между двумя параллельными прямыми* $2x + y - 12 = 0$ *и* $2x + y - 3 = 0$.

Решение: Воспользуемся формулой $\rho(l_1, l_2) = \dfrac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|-3+12|}{\sqrt{4+1}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}\text{(ед.)}$$

Ответ: $\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ (ед.)

Упражнения:

120. Постройте следующие прямые: а) $2x + 3y - 12 = 0$; б) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} = 1$; в) $y = 5x$

121. Проверьте, принадлежат ли точки $A(3;5)$, $B(1;2)$, $C(-3;0)$, $D(0;7)$ прямой $7x - 3y + 21 = 0$.

122. Составьте уравнение прямой, если ее угловой коэффициент $k = \dfrac{2}{3}$,

а $b = -\dfrac{1}{3}$.

123. Определите угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy для прямой $7x - y + 5 = 0$.

124. Дана прямая $5x + 3y - 15 = 0$. Составьте для нее уравнение «в отрезках».

125. Составьте уравнение прямой «в отрезках на осях», если она пересекает оси координат в точках: а) $A(-2;0)$ и $B(0;3)$; б) $A(3;0)$ и $B(0;-4)$.

126. Напишите параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $M(1;-3)$ и $N(2;-1)$.

127. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2;5)$ и с направляющим вектором $\vec{p}(3;-1)$.

128. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-5)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (4;2)$.

129. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $B(1;2)$ и имеющей угловой коэффициент $k = -3$.

130. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;4)$ и отсекающей на оси Oy отрезок b=2.

131. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;-5)$ и $B(3;-1)$.

132. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;2)$ параллельно прямой $2x - 3y + 7 = 0$

133. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;-1)$ параллельно прямой AB, где $A(-2;6)$ и $B(3;-1)$.

134. Составьте уравнения сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(-1;2)$, $B(2;-3)$ и $C(4;-5)$.

135. Вычислите координаты точки C – середины отрезка AB, если $A(3;-4)$ и $B(-1;4)$.

136. Треугольник задан вершинами $A(-3;4)$, $B(-4;-3)$ и $C(8;1)$. Составьте уравнение медианы AD.

137. Даны уравнения сторон треугольника: $x + 3y - 3 = 0$, $3x - 11y - 29 = 0$ и $3x - y + 11 = 0$. Найдите вершины этого треугольника.

138. Найдите острый угол между прямыми $2x - 3y + 6 = 0$ и $3x - y - 3 = 0$.

139. Найдите расстояние от точки $M(4;\ 3)$ до прямой $4x+3y+2=0$.

140. Проверьте, перпендикулярны ли следующие прямые $3x-4y+14=0$ и $4x+3y-7=0$.

141. Даны уравнения сторон треугольника: $6x-y-4=0$, $2x+y-12=0$ и $2x-3y+4=0$. Найдите уравнения его медиан.

142. Даны две смежные вершины квадрата $A(2;0)$ и $B(-1;4)$. Составьте уравнения сторон *AD*, *AB*, *BC*.

143. Даны уравнения двух сторон ромба $3x-10y+37=0$ и $9x+2y-17=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x-2y-19=0$. Найдите уравнения двух других сторон ромба и второй диагонали.

144. Даны смежные стороны параллелограмма $x-y-1=0$ и $x-2y=0$. Диагонали пересекаются в точке $F(3;-1)$. Найдите уравнения двух других сторон.

145. Две смежные стороны параллелограмма заданы уравнениями $5x-3y+28=0$ и $x-3y-4=0$; координаты вершины, противоположной вершине, из которой выходят две данные стороны параллелограмма $(10;6)$. Составьте уравнение других сторон параллелограмма и его диагоналей.

146. Даны середины сторон правильного треугольника *ABC*: $M(2;-1)$ - середина *AC*, $N(-3;-3)$ - середина *BC*, $P(-1;0)$- середина *AB*. Найдите уравнения сторон треугольника.

147. Две стороны квадрата заданы уравнениями $3x+y+6=0$ и $15x+5y+10=0$. Найдите площадь квадрата.

148. Дан ромб *ABCD*. Известно, что *AD*: $x+3y+12=0$, *BC*: $x+3y-8=0$, *AC*: $2x+y+4=0$. Найдите вершины ромба.

5.2.Плоскость и прямая в пространстве

Пример 5.2.1. *Определить расстояние от точки* $M(3;5;-8)$ *до плоскости* $6x-3y+2z-28=0$.

Решение: $d=\dfrac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{|6\cdot3-3\cdot5+2\cdot(-8)-28|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}}=\dfrac{41}{7}=5\dfrac{6}{7}$

Ответ: $5\frac{6}{7}$.

Пример 5.2.2. *Найти уравнение плоскости, проходящей через точку* $M(2;3;-1)$ *параллельно плоскости* $5x-3y+2z-10=0$.

Решение: Воспользуемся формулой $A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$

$5\cdot(x-2)-3\cdot(y-2)+2\cdot(z+1)=0$

$5x-3y+2z+1=0$

Ответ: $5x-3y+2z+1=0$

Пример 5.2.3. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $A(5;4;3)$ *и отсекающей равные отрезки на осях координат.*

Решение: Воспользуемся формулой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Координаты точки A удовлетворяют уравнению искомой плоскости, поэтому выполняется равенство $\frac{5}{a}+\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1 \Rightarrow a=12$.

Уравнение искомой плоскости имеет вид $x+y+z-12=0$

Ответ: $x+y+z-12=0$

Пример 5.2.4. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точки* $D(-1;-4;3)$ *и* $F(1;2;-4)$ *и перпендикулярной плоскости* $x-2y+3z+5=0$.

Решение: За нормальный вектор $\vec{n}$ искомой плоскости примем векторное произведение векторов $\overrightarrow{DF}=(2;6;-7)$ и $\vec{n_1}=(1;-2;3)$. Таким образом

$$\vec{n}=\overrightarrow{DF}\times\vec{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 6 & -7\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}6 & -7\\ -2 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & -7\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4\vec{i}-13\vec{j}-10\vec{k}$$

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку $D(-1;-4;3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(4;-13;-10)$:

$4\cdot(x+1)-13\cdot(y+4)-10\cdot(z-3)=0$ или $4x-13y-10z-18=0$

Ответ: $4x-13y-10z-18=0$

Пример 5.2.5. *Найти угол между плоскостями* $2x-3y+4z-1=0$ *и* $3x-4y-z+3=0$.

Решение:

$$\cos\varphi=\frac{|A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{|2\cdot 3+(-3)\cdot(-4)+4\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{14}{\sqrt{29\cdot 26}}=0{,}51$$

$\varphi = 59{,}3^0$

Ответ: $\varphi = 59{,}3^0$

Пример 5.2.6. *Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку* $M(2;1;3)$ *и параллельной вектору* $\vec{q}(4;-5;-6)$.

Решение: Воспользуемся формулой $\dfrac{x-x_0}{q_1} = \dfrac{y-y_0}{q_2} = \dfrac{z-z_0}{q_3}$. Получаем $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z-3}{-6}$.

Ответ: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z-3}{-6}$.

Пример 5.2.7. *Составить уравнение прямой, проходящей через 2 точки* $M(-1;2;-3)$ *и* $N(-2;4;7)$.

Решение: Воспользуемся формулой $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Получаем

$$\frac{x+1}{-2+1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z+3}{7+3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{10}$$

Ответ: $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{10}$.

Пример 5.2.8. *Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку* $A(2;-3;-2)$.

Решение: За направляющий вектор примем вектор $\overrightarrow{OA}(2;-3;-2)$.

Используя параметрическое уравнение прямой $\begin{cases} x = x_0 + tn_1 \\ y = y_0 + tn_2 \\ z = z_0 + tn_3 \end{cases}$, получаем

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 - 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 - 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$.

Упражнения:

149. Даны точки $A(3;-2;-1)$, $B(0;0;2)$, $C(-3;1;0)$, $D(-4;-2;2{,}5)$. Укажите, какие из них принадлежат плоскости $2x - 3y + 4z - 8 = 0$.

150. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;0;1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{m}(1;-1;3)$.

151. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $C(2;-1;-5)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{AB}$, где $A(2;1;-1)$ и $B(1;-3;2)$.

152. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;-2;-1)$ и $B(3;-2;-4)$ и перпендикулярной плоскости $x-2y-z+5=0$.

153. Найдите угол между плоскостями $x-y+z+1=0$ и $2x+3y-z-3=0$.

154. Определите расстояние от точки $C(-2;0;-1)$ до плоскости $9x-5y+3z-21=0$.

155. Найдите расстояние между параллельными плоскостями $2x-y+3z-4=0$ и $2x-y+3z+10=0$.

156. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $B(5;3;-2)$ и параллельной вектору $\vec{r}(2;-1;3)$.

157. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;-2;-4)$ и $B(-3;0;1)$.

158. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $F(1;4;-3)$.

5.3. Применение прямой к решению экономических задач

Пример 5.3.1. *Издержки производства 100 шт. некоторого товара составляют 300 руб., а 500 шт. – 600 руб. Определить издержки производства 400 шт. товара при условии, что функция издержек линейна.*

Решение:

Даны две точки прямой: $M_1(100;\ 300)$ и $M_2(500;\ 600)$. Подставляя координаты точек M_1 и M_2 в уравнение:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

последовательно получаем:

$$\frac{y-300}{600-300}=\frac{x-100}{500-100}\Rightarrow 400\cdot(y-300)=300\cdot(x-100)\Rightarrow$$

$$400y-120000=300x-30000\Rightarrow\ 300x-400y+90000=0\Rightarrow$$

$$3x-4y+900=0$$

Если x = 400,
то: $3\cdot 400-4y+900=0\ \Rightarrow 4y=2100\Rightarrow y=525$, то есть искомая величина составляет 525 руб.

Ответ: 525 руб.

Задачи:

159. Издержки *C*(у.е.) при производстве некоторого товара линейно зависят от объема производства *X* (ед.). Известно, что при *X*=2 *C*=12, а при *X*=6 *C*=14. Какой вид имеет функция издержек производства?

160. Издержки *C* (у.е) при производстве некоторого товара линейно зависят от объема производства *X* (ед.). Известно, что при *X*=2 *C*=13, а при *X*=8 *C*=16. Пусть товар реализуется по цене *P* = 2,5 у. е. за одну ед. При каком объеме производства прибыль будет нулевой?

161. Издержки перевозки двумя средствами транспорта выражаются функциями y = 150 + 50x и y = 250 + 25x, где x – расстояние перевозки в сотнях километров, а y – транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится второе средство?

162. Издержки производства 200 шт. некоторого товара составляют 300 руб., а 700 шт. – 800 руб. Определить издержки производства 500 шт. товара при условии, что функция издержек линейна.

ОТВЕТЫ:

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -9 \\ 2 & 19 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -8 & 10 \\ 3 & -15 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -17 & 1 & 6 \\ 12 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ **4.** а) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ -10 & -15 \\ 8 & -18 \end{pmatrix}$, не существует; в) не существует, $(0 \;\; 0 \;\; -13)$; г) $\begin{pmatrix} -14 & 16 & 4 \\ -3 & 11 & 6 \\ -13 & 14 & 17 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 7 & 3 & 8 \\ -21 & 26 & 11 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 34 & 0 & 82 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 13 & -5 & 17 \\ 5 & -3 & -2 \\ 17 & 2 & 20 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

9. а)13; б) -12; в) 1. **10.** а) 2; б) 18; в) 3; г)118. **11.** $-1{,}5$. **12.** 0 или 1.
13. $x \in (-\infty; -1]$. **14.** 3, -5, 0, 5, -7, -6, 4, 10, 5, 10. **15.** 1; 11; -9; -15.
16. $A_{23} = 18,\; A_{14} = -14$. **17.** $A_{11} = -2,\; A_{12} = -1,\; A_{21} = -3,\; A_{22} = -5$.
18. $A_{11} = 10,\; A_{12} = -5,\; A_{21} = -3,\; A_{13} = 2,\; A_{21} = 9,\; A_{22} = 15,\; A_{23} = -6,\; A_{31} = -4,\; A_{32} = 2,\; A_{33} = 7$

19. $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}02 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & -0{,}08 \end{pmatrix}$ **21.** -190. **22.** 42. **23.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **24.** Решений

нет. **25.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3{,}5 & -2{,}25 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** r(A) =3. **29.** r(A) =3.

30. r(A) =3. **31.** $(270 \quad 270 \quad 375)$, третий магазин. **32.** $\begin{pmatrix} 2160 \\ 1270 \\ 1910 \end{pmatrix}$ и 180670.

33. $A_{год} = \begin{pmatrix} 198 & 275 & 229 & 217 \\ 199 & 240 & 155 & 268 \end{pmatrix}$, $A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 & 0 \\ -14 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}$
$A_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 4 & 2 \\ -5 & 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}$, $A_4 - A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 1 \\ -5 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **34.** $(670 \quad 1860 \quad 510 \quad 1680)$
35. 28000.

ТЕМА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

36. а) $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}x_2 - \dfrac{1}{16}x_4 \\ x_2 - своб.н. \\ x_3 = -\dfrac{11}{8}x_4 \\ x_4 - своб.н. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

37. а) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 4 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1 \end{cases}$ **38.** При $\alpha = 5$ система совместна, а при $\alpha \neq 5$ - несовместна. **39.** а) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{12} \\ x_2 = \frac{17}{12} \\ x_3 = -\frac{13}{12} \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

40. Если $a \neq -3, b \in R$, то система имеет единственное решение. Если $a = -3, b \neq -19$ - система решений не имеет. Если $a = -3, b = -19$ - система имеет бесконечно много решений.

41. $x = bc,\ y = ac,\ z = ab$ **42.** а) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4x_4 \\ x_3 = 9x_4 \\ x_4 = \text{своб.н.} \end{cases}$ **45.** Прибыль по сравнению с прошлым годом выросла в 1-м цехе на 15 000 000 тг, во 2-м цехе на 30 000 000 тг, в 3-м цехе на 24 000 000 тг. Большую прибыль фабрике приносит второй цех по производству зимней обуви. **46.** Данная задача имеет множество решений $\begin{cases} x_1 = 25 + x_3 \\ x_2 = 240 - 2x_3 \\ x_3 = \text{св.неизв.} \end{cases}$. **47.** Курс евро 39 руб., отношение равно 1,3. **48.** Курс доллара 28 руб., отношение равно 0,7. **49.** 90 сарафанов, 15 брюк, 60 юбок. **50.** 400 штук ручных часов, 200 штук настенных часов. **51.** Первый банк выплатил 15% годовых, второй – 10% годовых, третий - 13% годовых.

ТЕМА 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

52. а) $M_1(2;0)$; б) $M_2(-3;0)$; в) $M_3(0;3)$; г) $M_4(0;-2)$; д) $M_5(2;3)$.
54. а) $x = -2; y = 7$; б) $x = 9; y = 5$; в) $x = 3; y = 7$. **55.** а) $7 - 2i$; б) $4 + i$; в) $13 - 2i$; г) $6i$; д) $1 + 5i$; е) $2 - 7i$. **56.** а) $16 + 11i$; б) $17 + 17i$; в) $2 - 9i$; г) $-11 - 7i$; д) 2; е) $-6 + 24i$; ж) $15 - 10i$. **57.** а) $-16 + 30i$; б) $-45 - 28i$; в) $35 + 12i$; г) $-9 + 46i$; д) $16 + 88i$; е) $110 - 74i$. **58.** а) $\frac{10}{13} + \frac{15}{13}i$; б) $\frac{9}{17} + \frac{2}{17}i$; в) $\frac{2}{5} - \frac{3}{5}i$; г) $-\frac{5}{13} - \frac{27}{13}i$; д) $-\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$; е) $\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i$ **59.** а) $-\frac{18}{13} + \frac{1}{13}i$; б) $\frac{24}{13} + \frac{8}{13}i$; в) $-\frac{17}{29} + \frac{28}{29}i$; г) $2 + 5i$; д) -1; е) 20; ж) 1; и) $-\frac{3}{26} - \frac{41}{26}i$; к) $\frac{2}{3} + \frac{7}{9}i$. **60.** а) $3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$;

б) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$; в) $6\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$; г) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

д) $\frac{1}{5}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$; е) $\frac{3}{28}\left[\cos\left(\frac{8\pi}{15}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{15}\right)\right]$. **61.** а) $3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right]$; в) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$; г) $8\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$;

д) $8\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$. **62.** $-\frac{1}{16}$. **63.** $27\left[\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right]$. **64.** -1.

65. а) $3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right], k\in z$; б) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\right], k\in z$;

в) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\right], k\in z$; г) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\right], k\in z$;

д) $\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\right], k\in z$ **66.** а) $5i$; б) $2-2i\sqrt{3}$; в) -1; г) $2+i\sqrt{2}$; д) 3.

67. а) -128; б) 0. **68.** а) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, - i; г) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$;

д) $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$; е) 1, -1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **69.** а) $\cos 1+i\sin 1$; б) -1; в) $e(\cos 1+i\sin 1)$; г) i; д) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

е) $e^4(\cos 3+i\sin 3)$; ж) $e^2(\cos 1-i\sin 1)$; и) $e^{-2}(\cos 3+i\sin 3)$ **70.** а) $\frac{i(e^2-1)}{2e}$;

б) $\cos 1\frac{(e^2+1)}{2e}+i\sin 1\frac{(1-e^2)}{2e}$; в) $\sin 1\frac{(e^2+1)}{2e}+i\cos 1\frac{(1-e^2)}{2e}$ **71.** а) $e^{0\cdot i}$; б) $2e^{\frac{i\pi}{6}}$;

в) $2\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}$; г) $2\sqrt{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$ **72.** а) $4e^{\frac{5\pi i}{12}}$; б) $e^{\frac{i\pi}{12}}$; в) $16e^{i\pi}$; г) $\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{18}}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{13i\pi}{18}}$, $\sqrt[3]{2}e^{-\frac{11i\pi}{18}}$;

д) $\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{16}}$, $\sqrt[4]{2}e^{\frac{9i\pi}{16}}$, $\sqrt[4]{2}e^{-\frac{15i\pi}{16}}$, $\sqrt[4]{2}e^{-\frac{7i\pi}{16}}$.

ТЕМА 4. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

73. $(5;7;2)$ **74.** $(-1;-1;1)$ **75.** $(11;-6;1)$ **76.** $(-2;6;3)$ **77.** $(5;-7;-14)$ **78.** а) $(1;5;-3)$; б) $(5;3;-2)$; в) $(-2;5;-5)$; г) $(6;9;-12)$; д) $(4;-3;8)$; е) $(-5;12;-9)$ **79.** 6. **80.** $\sqrt{10}$

81. $(8;2;-2)$; $6\sqrt{2}$ **82.** 10. **83.** 10. **84.** а) да; б) нет **85.** $n=6$; $p=\frac{8}{3}$ **86.** 45.

87. а) 25; б) 11. **88.** -93. **90.** 2 **91.** а) $\arccos\frac{4}{9}$; б) $\arccos\frac{1}{11}$ **92.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}$

93. $\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{2}{3}$ **94.** 2. **96.** 10. **97.** 12. **98.** $6\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$ **99.** $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ **100.** $\sqrt{70}$

101. $\sqrt{227}$ **104.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ **105.** $\frac{2\sqrt{174}}{29}$ **106.** 119 **107.** а) $\frac{35}{\sqrt{3270}}$; б) $\sqrt{437}$; в) 4. **108.** $V=\frac{55}{6};\ S=\frac{11}{2};\ h=5;\ \vec{d}(6;6;7)$. **110.** 15. **111.** Линейно зависимы.

112. образуют базис, т.к. определитель = 5, $a=3e_1+e_2+2e_3$ **113.** да, а$=2e_1+e_2+e_3$ **114.** 3. **115.** а) линейно зависимая; б) линейно независимая; в) линейно зависимая; г) линейно независимая.

116. $(4955{,}625; 4781{,}25; 6350{,}625; 5355; 5838{,}75; 8746{,}875)$ **117.** 120 мрд. руб. **118.** 570 кг, 1220 ч, 3500 ден.ед. **119.** 81120 руб.

ТЕМА 5. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЛОСКОСТЬ

121. точки C и D. **122.** $2x-3y-1=0$ **123.** $k=7;\ b=5$ **124.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$

125. а) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$, б) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$ **126.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t \end{cases}$ **127.** $x+3y-13=0$

128. $2x+y-1=0$ **129.** $3x+y-5=0$ **130.** $y=\frac{2}{3}x+2$ **131.** $4x-5y-17=0$

132. $2x-3y+12=0$ **133.** $7x+5y+26=0$

134. $5x+3y-1=0,\ 7x+5y-3=0,\ x+y+1=0$ **135.** $C(1;\ 0)$ **136.** $3x+y+5=0$

137. $(6;\ -1), (-5;-4), (-3;2)$ **138.** $arctg\frac{7}{9}\approx 37{,}9^0$ **139.** $\frac{27}{5}$ **140.** Перпендикулярны

141. $8x-11y+2=0$, $5x-2y-15=0$, $2x+7y-32=0$ **142.** $4x+3y-8=0$, $3x-4y-6=0$, $3x-4y+19=0$. **143.** $9x+2y-113=0$, $3x-10y-59=0$, $2x+3y-14=0$ **144.** $x-2y-10=0$, $3x-y-7=0$. **145.** $x-3y+8=0$, $5x-3y-32=0$, $5x-9y+4=0$, $y=1$ **146.** $2x-5y+2=0$, $3x-2y-8=0$, $x+3y+12=0$. **147.** 1,6 (кв.ед) **148.** $(0;\ -4),\ (2;2),\ (-4;4),\ (-6;-2)$ **149.** точки A, B и D. **150.** $x-y+3z-1=0$

151. $x+4y-3z-13=0$ **152.** $6x-y-4z=0$ **153.** $\approx 72^0$. **154.** $\frac{41\sqrt{115}}{115}$. **155.** $\sqrt{14}$

156. $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{3}$ **157.** $\frac{x-3}{-6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+4}{5}$ **158.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=4+4t \\ z=-3-3t \end{cases}$ **159.** $C(x)=0{,}5x+11$ **160.** 3. **161.** 400 км. **162.** 600 руб.

Литература:

1. Атурин, В.В. Высшая математика. Задачи с решениями для студентов экономических специальностей [Текст]: учебное пособие для студентов учреждений высшего проф. образования/ В.В. Атурин. –М.: Издательский центр «Академия», 2010.- 304 с.
2. Богомолов, Н.В. Практические занятия по математике [Текст] : учеб. пособие / Н. В. Богомолов. - 4-е изд., стер. - М. : Высшая Школа, 1997. - 495 с. : ил.
3. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 421 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3588-2. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/425852
4. Кремер, Н.Ш. Линейная алгебра [Текст]: учебник и практикум для академического бакалавриата / Н.Ш. Кремер, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Издательство «Юрайт», 2014. - 308 с.
5. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата[Текст]: учебник и практикум / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; под ред. Н.Ш.Кремера -4-е изд. переработ. и доп.- М.:Издательство Юрайт, ИД Юрайт, 2015.-909 с.
6. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 340 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01179-1. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/436467
7. Математика для экономистов: учебник для академического бакалавриата / О. В. Татарников [и др.]; под общей редакцией О. В. Татарникова. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 593 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-4847-9. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/426100
8. Михалев, А.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Текст]: уч. пос. для студентов учреждений высшего проф. образования / А.А.Михалев, И.Х.Сабитов. –М.: Издательский центр «Академия», 2013.- 256 с.
9. Орлова, И. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. В. Орлова, В. В. Угрозов, Е. С. Филонова. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 370 с. — (Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-9556-5. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://www.biblio-online.ru/bcode/432810
10. Сборник задач по высшей математике для экономистов /Геворкян П.С. и др.; Под ред. П.С. Геворкяна. — М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2010. — 384 с.—(Высшее образование).
11. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учеб.пособие / Под ред. В.И.Ермакова. – 2-е изд., испр. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 575 с.

Сизова О.А.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Формат 60х84 1/16
Бумага офисная.
Печать офсетная
4,125 усл. печ. л.
Тираж 100 экз.

Отпечатано: ТОО «New Line Media»
г. Костанай, пр. Аль-Фараби, 115, оф. 512
тел.: 8(7142) 53-11-47, 53-06-71
e-mail: geosprint@mail.ru